

М.М. ГУРАРИЙ, М.М. ЖАРОВ, С.Г. РУСАКОВ, С.Л. УЛЬЯНОВ
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА
ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ**

Гурарий М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. **Вычислительные алгоритмы понижения порядка дробно-рациональных передаточных функций.**

Аннотация. Задача редуцирования линейной динамической системы с постоянными коэффициентами рассматривается как задача аппроксимации ее исходной дробно-рациональной передаточной функции аналогичной функцией более низкого порядка. Ошибка аппроксимации определяется как интегральная квадратичная норма отклонения переходных характеристик исходной и редуцированной передаточной функции во временной области. Рассмотрены формулировки двух основных типов аппроксимационных задач: а) традиционная задача минимизации ошибки аппроксимации при заданном порядке редуцированной модели; б) задача минимизации порядка передаточной функции при заданном допуске на погрешность аппроксимации.

Разработаны алгоритмы решения задач аппроксимации, основанные на итерационном процессе Гаусса – Ньютона. На шаге итерации производится линеаризация текущего отклонения переходных характеристик по коэффициентам знаменателя редуцируемой передаточной функции. Линеаризованное отклонение используется для получения новых значений коэффициентов передаточной функции с помощью метода наименьших квадратов в функциональном пространстве на основе ортогонализации Грама – Шмидта. В работе получен общий вид выражений, представляющих линеаризованное отклонение переходных характеристик.

Для решения задачи минимизации порядка передаточной функции в рамках алгоритма метода наименьших квадратов также используется процесс Грама – Шмидта, условием завершения которого является достижение заданной допустимой нормы ошибки. Показано, что последовательность шагов процесса, соответствующая чередованию коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции, обеспечивает минимальный порядок передаточной функции.

Дается обзор разработанных алгоритмов на случай векторной передаточной функции с общим знаменателем. Представлен алгоритм с заданием ошибки аппроксимации в виде геометрической суммы скалярных ошибок. Обсуждается использование минимаксной формы для оценки ошибки и возможность распространения предложенного подхода на задачу редуцирования нерациональной исходной передаточной функции.

Разработана экспериментальная программа, реализующая предложенные алгоритмы, и получены результаты численных расчетов на тестовых примерах различных типов.

Ключевые слова: линейные системы, редукция моделей, передаточная функция, дробно-рациональная аппроксимация.

1. Введение. Исследование и разработка методов редукции (понижения порядка) математических моделей – важная ветвь теории динамических систем и теории управления. Актуальность этого направления постоянно возрастает в связи с резким ростом размерностей математических моделей, применяемых в различных областях науки и техники.

Назначение методов редукции [1] состоит в существенном снижении вычислительных затрат на моделирование динамической

системы при сохранении достаточной точности полученных траекторий ее поведения. Последнее требование принципиально отличает модель редукции от известной в теории управления модели сравнения [2, 3], которая оценивает мажоранту и миноранту траектории системы. Как указано в [2], «...во многих случаях точного поведения сложной системы во всех деталях и не требуется, достаточно лишь убедиться в том, что те или иные качественные показатели динамического процесса не выходят за некоторые установленные границы. Для подобных ситуаций и был развит принцип сравнения». Поэтому задача редукционирования не может использовать принцип сравнения.

Разработка алгоритмов редукции произвольных систем в настоящее время практически нереальна из-за отсутствия единого вида модели нелинейной системы. Поэтому основные усилия исследователей направляются на редукцию моделей, представленных линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) с постоянными коэффициентами [4-7]. Такие модели допускают единообразное представление либо матрицами СОДУ, либо коэффициентами дробно-рациональных передаточных функций (ПФ).

Ограничение методов редукции линейными задачами не лишает их возможности обеспечить эффективное моделирование многих нелинейных систем, содержащих высокоразмерные линейные подсистемы. Примерами таких систем являются современные сверхбольшие интегральные схемы (СБИС), модели которых включают большое число паразитных линейных компонентов, представляющих соединение транзисторных ячеек, их электромагнитного взаимодействия и внешнего электромагнитного воздействия [8-10].

В рамках матричного представления линейных моделей следует отметить проекционные методы редукционирования на базе подпространств Крылова [11-17], в которых матрица пониженного порядка формируется путем умножения исходной матрицы на прямоугольную матрицу проектирования. Столбцы матрицы проектирования определяются ортогональным базисом в пространстве моментов (векторов состояний системы и некоторого числа их производных в заданном наборе частотных точек), что приводит к совпадению соответствующих выходных моментов исходной и редукционированной систем. То есть эти методы реализуют интерполяционный подход к редукционированию.

Однако порядок модели, полученной проекционными методами часто оказывается существенно выше порядка, необходимого для обеспечения достигнутой точности. Этот недостаток получил название

избыточность (redundancy) [15]. Он связан с коррелированностью выбранных базисных моментов системы и в наибольшей степени проявляется при редукции многопортовых систем. Для его преодоления предложены методы на основе генерации дополнительных векторов состояния в расширенном множестве частотных точек и получении базиса либо на основе сингулярного разложения [16], либо с помощью отбора наименее коррелированных векторов [17]. Эти методы также позволяют автоматически определять порядок по заданной точности редукции, в то время как традиционные подходы требуют явного задания порядка редуцированной модели.

Кроме того, к ограничениям проекционных методов относится то, что они используют вектора состояния в дискретном множестве частотных точек, что часто не позволяет учесть наличие узкополосных резонансов между выбранными точками и может приводить к заметной погрешности метода.

Рассмотренные недостатки присутствуют и в большинстве методов редукции на основе представления линейных моделей в форме дробно-рациональной ПФ [18-23]. Эти методы используют в основном двухэтапную процедуру. На первом этапе вычисляются значения исходной ПФ в некотором множестве частотных точек, а на втором – производится дробно-рациональная аппроксимация полученной табличной зависимости. Достоинство такого подхода состоит в возможности его использования для редукции систем с распределенными параметрами при наличии соответствующей процедуры моделирования таких систем.

Наиболее известная реализация такого подхода представлена методом векторной аппроксимации (Vector Fitting) [18], который доказал свою эффективность на практике, несмотря на эвристический характер используемого алгоритма. Методы [19-20] основаны на оптимизационном подходе к задаче аппроксимации. Критерием является взвешенная сумма квадратов отклонений от вычисленных табличных значений. Однако применение оптимизации не устраняет ошибки, связанные с дискретным набором частотных точек.

Такие ошибки исключаются в методе удаления несущественных полюсов [21-23], который использует разложение дробно-рациональной ПФ на элементарные дроби и по определенному критерию отбрасывает те из них, которые признаны несущественными. Однако, отсутствие процедуры варьирования оставшимися параметрами (значения полюсов и вычетов) является его недостатком.

Предлагается пакет методов понижения порядка дробно-рациональных ПФ, который в отличие от известных подходов обеспечивает сочетание следующих характеристик:

– исключение избыточности редуцированной модели за счет использования алгоритмов оптимизации;

– исключение ошибок дискретизации частотной области за счет построение показателя оптимальности на основе оценки погрешности редукации в виде интегральной нормы отклонения переходных характеристик исходной и редуцированной ПФ;

– обеспечение возможности автоматического определения порядка редуцированных моделей по заданной допустимой погрешности.

2. Математическая формулировка задачи. В рассматриваемой задаче аппроксимирующая ПФ определена дробно-рациональной функцией лапласовской переменной s в лапласовской области:

$$H(s) = P(s) / Q(s) = \left(a_0 + \sum_{i=1}^m a_i s^i \right) / \left(b_0 + \sum_{i=1}^n b_i s^i \right), \quad (1)$$

где $P(s), Q(s)$ – полиномы числителя и знаменателя порядка m и n соответственно. Предполагается, что ПФ редуцируемой системы (исходная ПФ) имеет аналогичную форму дробно-рациональной функции с более высоким порядком знаменателя $\bar{n} \geq n$ и порядком числителя $\bar{m} < \bar{n}$:

$$\bar{H}(s) = \bar{P}(s) / \bar{Q}(s) = \left(a_0 + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \bar{a}_i s^i \right) / \left(b_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{b}_i s^i \right). \quad (2)$$

Пусть аппроксимирующая ПФ (1) имеет N различных полюсов со значениями r_i и кратностями k_i ($1 \leq i \leq N$). Аналогичные величины для исходной ПФ (2) обозначим $\bar{N}, \bar{r}_i, \bar{k}_i$. Тогда переходные характеристики (отклики на ступенчатую функцию – $h(t), \bar{h}(t)$) для ПФ (1), (2) являются оригиналами лапласовских функций $h(t) \rightarrow H(s) / s, \bar{h}(t) \rightarrow \bar{H}(s) / s$ соответственно, и имеют вид:

$$\begin{aligned} h(t) &= a_0 / b_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{k_i} d_{ij} t^j \exp r_i t, \\ \bar{h}(t) &= a_0 / b_0 + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{k}_i} \bar{d}_{ij} t^j \exp \bar{r}_i t. \end{aligned} \quad (3)$$

Ошибку аппроксимации (1) как функции ее параметров (порядки m, n и вектора коэффициентов a, b) мы будем

оценивать квадратом нормы отклонения переходных характеристик для ПФ (3). Такая оценка аналогична критерию оптимальности при достижении максимальной точности системы автоматического регулирования [24].

$$e(a, m, b, n) = \|\Delta h\|^2 = \int_0^\infty (\bar{h}(t) - h(t))^2 dt. \quad (4)$$

Здесь $\Delta h = \bar{h}(t) - h(t)$. Возможность вычисления интеграла в (4) будет обеспечена, если отклики ограничены на всей временной оси, поэтому будем предполагать, что выполняются стандартные условия устойчивости (отрицательные действительные части полюсов) и ограниченности (порядок числителя меньше порядка знаменателя) для переходных характеристик (3):

$$re(\bar{r}_i) < 0, re(r_i) < 0, \bar{m} < \bar{n}, m < n.$$

Другим необходимым условием существования интеграла (4) является равенство статических уровней переходных характеристик ($\bar{h}(\infty) = h(\infty)$) или значений ПФ в нулевой точке $\bar{H}(0) = H(0)$. Из того, что $H(0) = a_0 / b_0$, следует необходимость сохранения этого значения a_0 для всех ПФ, а учитывая, что коэффициент b_0 может быть выбран произвольно, можно считать, что оба нулевых коэффициента сохраняются в аппроксимирующей ПФ. Это условие отражено в выражениях (1, 2).

Задачей дробно-рациональной аппроксимации является определение порядков m, n и векторов a, b аппроксимирующей ПФ (жирным шрифтом здесь и далее выделены величины, формируемые в результате решения задачи). В рамках оптимизационных подходов к решению задачи определим два следующих возможных показателя оптимизации.

A. Минимальная ошибка (4) при заданных порядках числителя и знаменателя:

$$a, b = \underset{a, b}{\operatorname{argmin}} (e(a, m, b, n)). \quad (5)$$

В рамках этой задачи обычно предполагается максимально возможное значение порядка числителя $m = n - 1$.

B. Минимальный порядок ПФ (1) при заданном допуске на ошибку – Tol . Под порядком ПФ обычно понимается порядок

знаменателя, поэтому будем считать его приоритетным показателем, который определяется при максимально возможном порядке числителя.

В'. Минимальный порядок знаменателя при максимально возможном порядке числителя $m = n - 1$ может быть записан как нахождение требуемого порядка и последующее определение коэффициентов полиномов, что задается в виде:

$$\mathbf{n, b} = \operatorname{argmin}_{a, b} \left(n \mid \min_{a, b} (e(a, n - 1, b, n)) \leq Tol \right). \quad (6)$$

Здесь вертикальная черта, как обычно, разделяет критерий и условия оптимизации. После решения (6) можно перейти к следующему этапу.

В''. Минимальный порядок числителя при известном порядке знаменателя $m < n$:

$$\mathbf{a, m} = \operatorname{argmin}_{a, m} (e(a, m, \mathbf{b}, \mathbf{n})). \quad (7)$$

2.1. Модели многопортовых систем. Рассмотрим далее подход для распространения описанных задач на векторный случай, соответствующий многопортовым системам. При этом предполагается, что такая модель определяется единой динамической системой с общим набором полюсов. В этом случае векторная задача предполагает одинаковый знаменатель для всех ПФ, то есть аппроксимирующая и исходная векторные ПФ содержат K скалярных компонент вида:

$H^{(k)}(s) = P^{(k)}(s) / Q(s)$, $\bar{H}^{(k)}(s) = \bar{P}^{(k)}(s) / \bar{Q}(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, где $Q(s)$, $\bar{Q}(s)$ имеют такой же вид, как знаменатели в (1), (2), соответственно. При этом:

$$\bar{P}^{(k)}(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{\bar{m}^{(k)}} \bar{a}_i^{(k)} s^i, P^{(k)}(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{m^{(k)}} a_i^{(k)} s^i,$$

то есть $P^{(k)}(s)$, $\bar{P}^{(k)}(s)$ имеют верхний индекс (k) в переменных для коэффициентов полиномов и значений порядков.

В векторном случае под ошибкой k -й ПФ понимается значение ошибки (4), масштабированное квадратом весового коэффициента w_k для данной ПФ:

$$e^{(k)}(a^{(k)}, m^{(k)}, b, n) = w_k^2 e(a^{(k)}, m^{(k)}, b, n). \quad (8)$$

Предполагается, что весовые коэффициенты w_k задаются пользователем для соизмерения требований, предъявляемых к точности отображения различных ПФ. Значение w_k часто удобно задавать обратно пропорционально норме соответствующей исходной ПФ, которая определяется отклонением ее передаточной характеристики от статического значения $\bar{h}^{(k)}(\infty)$:

$$w_k = 1 / \bar{H}^{(k)}, \text{ где } \bar{H}^{(k)} = \sqrt{\int_0^\infty (\bar{h}^{(k)}(t) - \bar{h}^{(k)}(\infty))^2 dt}.$$

Ошибка аппроксимации вектора ПФ определяется как некоторая функция агрегирования Ψ значений ошибок всех компонент вектора:

$$Err(a^{(**)}, m^{(**)}, b, n) = \Psi(e^{(**)}(a^{(**)}, m^{(**)}, b, n)).$$

Здесь наличие верхнего индекса вида $x^{(**)}$ означает множество всех значений $x^{(k)}$ в диапазоне k от 1 до K .

Обычно рассматриваются два варианта свертки частных показателей оптимизации:

1. Линейная свертка:

$$\Psi^{sum}(e^{(**)}(a^{(**)}, m^{(**)}, b, n)) = \sum_{k=1}^K e^{(k)}(a^{(k)}, m^{(k)}, b, n). \quad (9)$$

2. Минимаксная свертка (наихудший случай):

$$\Psi^{max}(e^{(**)}(a^{(**)}, m^{(**)}, b, n)) = \max_k e^{(k)}(a^{(k)}, m^{(k)}, b, n). \quad (10)$$

При любом выборе критерия задачи аппроксимации \mathbf{A}, \mathbf{B}' могут быть определены аналогично скалярным задачам (5), (6) с заменой e, a, m на $E, a^{(**)}, m^{(**)}$ соответственно. Так, векторный вариант задачи (5) принимает вид:

$$\mathbf{a}^{(**)}, \mathbf{b} = \arg \min_{a,b} \left(E \left(\mathbf{a}^{(**)}, m^{(**)}, b, n \right) \right), \quad (11)$$

а для задачи (6):

$$\mathbf{n}, \mathbf{b} = \arg \min_{n,b} \left(n \left| \min_{a^{(**)},n} E \left(\mathbf{a}^{(**)}, n-1, b, n \right) \leq Tol \right. \right). \quad (12)$$

Задача **В''** (7) заменяется K задачами определения числителя для каждой ПФ:

$$\mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{m}^{(k)} = \arg \min_{a^{(k)}, m^{(k)}} \left(e \left(\mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{m}^{(k)}, \mathbf{b}, \mathbf{n} \right) \right), k = 1 \dots K. \quad (13)$$

3. Основные принципы построения алгоритмов.

Минимизация квадратичной формы от неизвестных параметров наиболее эффективно реализуется на основе классического метода наименьших квадратов (МНК) [25]. Однако нелинейная зависимость отклонения ПФ в (4) от коэффициентов знаменателя не позволяет непосредственно применить МНК. В нелинейном случае используются итерации Гаусса – Ньютона [26], на каждом шаге которых решается линеаризованная задача МНК. Полученное решение используется как текущее приближение для выполнения следующей итерации. Процесс прекращается, когда изменение ошибки (4) на шаге становится достаточно малым (уровень малости определяется пользователем).

Основные этапы применения метода Гаусса – Ньютона к задаче дробно-рациональной аппроксимации.

3.1. МНК в функциональном пространстве. Так как квадратичная форма, представляющая ошибку, задается в интегральном виде (4), используется классическая форма МНК в функциональном пространстве [25] для определения наилучшей (минимизирующей квадратичную ошибку) аппроксимации заданной функции $g(t)$ линейной комбинацией заданных функций $f_i(t)$ с неизвестным вектором коэффициентов c :

$$c = \operatorname{argmin}_c \sum_{i=1}^L c_i \cdot f_i(t) - g(t). \quad (14)$$

Для решения задачи (14) с фиксированным числом (L) членов суммы в (14) применяется процесс ортогонализации Грама – Шмидта,

который использует следующее определение скалярного произведения и нормы вектора в функциональном пространстве:

$$\langle x \cdot y \rangle = \int_0^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt, \quad x^2 = x \cdot x. \quad (15)$$

Алгоритм строит ортонормальный базис $z_i(t) : \langle z_i \cdot z_j \rangle = \delta_i^j$, где δ_i^j – символ Кронекера. Он состоит в последовательном ($i = 1, 2, \dots$) формировании очередного базисного вектора z_i разложением текущей функции $f_i(t)$ по предыдущим базисным векторам и нормализацией остаточной функции.

$$\varphi_i = f_i - \sum_{j=1}^i \langle f_i \cdot z_j \rangle \cdot z_j, \quad z_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}. \quad (16)$$

В процессе вычислений (16) запоминается очередная i -я строка нижней треугольной матрицы $D_{ij} = \langle f_i \cdot z_j \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, i$).

После выполнения процесса Грама – Шмидта для решения задачи (14) следует получить коэффициенты разложения функции $g(t)$ по ортогональному базису $z_i(t)$, и можно определить квадрат нормы ошибки, монотонно убывающий на каждом шаге:

$$d_i = \langle g \cdot z_i \rangle, \quad e_i = e_{i-1} - d_i^2. \quad (17)$$

Перед началом разложения $g(t)$ задается $e_0 = \|g\|^2 = g \cdot g$.

Вектор c коэффициентов c_i в (14) определяется затем решением линейной системы с треугольной матрицей D , полученной в процессе Грама – Шмидта и вектором правой части из коэффициентов разложения d_i функции $g(t)$: $c = D^{-1}d$.

Формулировка (14) соответствует задаче типа (5) с фиксированным числом коэффициентов. Критерии типа (6,7) соответствуют задаче обеспечения требуемой погрешности при минимальном числе членов в последовательности $f_i(t)$, определив и вектор коэффициентов c :

$$L, c = \underset{L}{\operatorname{argmin}} \left(L \mid \min_c (e(c, L)) \leq Tol \right), \quad (18)$$

Решение может быть легко получено, если процессы (16) и (17) выполнять параллельно, производя на каждом шаге оценку ошибки по (17), и прекращать выполнение при достижении требуемой точности $e_i \leq Tol$. Тогда последнее значение индекса i , при котором удовлетворяется данное требование, равно искомому минимуму (L) длины последовательности.

3.2. Линеаризация ПФ по коэффициентам полиномов.

Функции $f_i(t)$, $g(t)$ (1) должны определяться из ПФ $H(s)$, линеаризованной вблизи полученной на шаге Гаусса – Ньютона начальной аппроксимацией $H_{init}(s) = P_{init}(s) / Q_{init}(s)$. На первом шаге в качестве начальной аппроксимации берется исходная ПФ: $H_{init}(s) = \bar{H}(s)$. Обозначим отклонения числителя и знаменателя ПФ $H(s)$ от соответствующих величин в ПФ $H_{init}(s)$ как:

$$\delta P = P - P_{init}, \quad \delta Q = Q - Q_{init}. \quad (19)$$

На основе δP , δQ запишем выражение для ПФ:

$$H(s) = \frac{P}{Q} = \frac{P_{init} + (P - P_{init})}{Q_{init} + (Q - Q_{init})} = \frac{P_{init}}{Q_{init}} \cdot \frac{1 - \delta P / P_{init}}{1 - \delta Q / Q_{init}}.$$

и представим его в виде разложения в ряд Тейлора по степеням δQ :

$$H(s) = \frac{P_{init}}{Q_{init}} \cdot \left(1 - \delta P / P_{init} - \delta Q / Q_{init} + o(\delta Q^2) + o(\delta Q \cdot \delta P) \right).$$

Пренебрегая в этом выражении членами порядка выше первого относительно малых величин $\delta Q, \delta P$ и подставив в него выражения для $\delta Q, \delta P$ (19), получим приближенное выражение для ПФ с линейной зависимостью как от коэффициентов числителя, так и от коэффициентов знаменателя:

$$H(s) \approx \frac{P_{init}}{Q_{init}} + \frac{1}{Q_{init}} P - \frac{P_{init}}{Q_{init}^2} Q.$$

Вычитая из этого выражения исходную ПФ \bar{H} (2) и подставляя в него выражения для P и Q из (1), получим отклонение $\Delta H = H(s) - \bar{H}(s)$ в виде:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \sum_{i=1}^m \frac{a_i s^i}{Q_{init}} - \sum_{i=1}^m \frac{b_i s^i P_{init}}{Q_{init}^2} - \left(\bar{H} - \frac{P_{init} - a_0}{Q_{init}} + \frac{b_0 P_{init}}{Q_{init}^2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i U_i(s) - \sum_{i=1}^m b_i V_i(s) - G(s), \end{aligned} \quad (20)$$

где лапласовские функции $U_i(s), V_i(s), G(s)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0(s) &= 1/Q_{init}(s), U_i(s) = s^i U_0(s), \\ V_0(s) &= P_{init}(s)/Q_{init}^2(s), V_i(s) = s^i V_0(s), \\ G(s) &= H(s) - (P_{init}(s) - a_0)/Q_{init}(s) + b_0 V_0(s). \end{aligned} \quad (21)$$

Оригиналы этих функций можно получить в виде:

$$\begin{aligned} u_0(t) &\rightarrow U_0(s), u_i(t) = \frac{d^i u_0}{dt^i}, i = 1, \dots, M, \\ v_0(t) &\rightarrow V_0(s), v_i(t) = \frac{d^i v_0}{dt^i}, i = 1, \dots, N, \\ g(t) &\rightarrow G(s). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь учитывается, что умножение изображения на лапласовскую переменную s соответствует дифференцированию оригинала. Тогда выражение (20) после перехода во временную область примет вид:

$$\Delta h(t) \approx \sum_{i=1}^m a_i \cdot u_i(t) - \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i(t) - g(t). \quad (23)$$

Полученное выражение (23) соответствует общему виду функции, норма которой минимизируется в рамках МНК (14), что позволит нам применить процесс ортогонализации Грама – Шмидта для задач аппроксимации ПФ (7, 9). Отметим, что вычисление интегралов для скалярных произведений (15) может быть проведено аналитически для функций (3) и их производных. Для этого требуется предварительное определение параметров функций (3) вычислением вычетов дробно-рациональных ПФ (1). Альтернативный подход к вычислению выражений вида (15) по значениям вычетов в точках полюсов изображения одного из сомножителей приводится далее.

3.3. Расчет скалярных произведений оригиналов функций по их изображениям Лапласа. Для расчетов вида (15) рассмотрим скалярное произведение функций $e(t)$ и $r(t)$:

$$\langle e \cdot r \rangle = \int_0^{\infty} e(t) \cdot r(t) dt. \quad (24)$$

Введем функции:

$$p(t) = e(t) \cdot r(t) \text{ и } w(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau. \quad (25)$$

При рассмотрении функций $e(t), r(t), p(t), w(t)$ будем обозначать их оригиналы как $E(s), R(s), P(s), W(s)$ соответственно.

Тогда в соответствии с правилом интегрирования оригинала [27], получаем из (25):

$$W(s) = P(s)/s \text{ или } P(s) = s \cdot W(s). \quad (26)$$

Так как для $f(t) \rightarrow F(s)$ имеет место равенство [27]: $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то из (24), (26) следует, что:

$$\langle e \cdot r \rangle = w(\infty) = P(0). \quad (27)$$

Применяя правило умножения оригиналов [27] к функции $p(t)$ (25), получим:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} E(z) \cdot R(s-z) dz = P(s).$$

Отсюда для $s = 0$ получаем из (27):

$$\langle e \cdot r \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} E(z) \cdot R(-z) dz. \quad (28)$$

Порядок числителя рассматриваемых дробно-рациональных функций меньше порядка их знаменателя по крайней мере на 1. То

есть порядок малости функций $E(s)$ и $V(s)$ при $s \rightarrow \infty$ имеет величину $o(1/|s|)$, откуда следует, что произведение $E(s)V(s)$ имеет порядок $1/|s|^2$. Тогда интеграл (20) сходится при $\lambda = 0$ в (28), и можно записать:

$$\langle e \cdot r \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(z) \cdot R(-z) dz. \quad (29)$$

Для вычисления (29) можно использовать теорему о вычетах [27]:

$$e \cdot r = \frac{1}{2\pi j} \oint F(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n \text{Res}F(z), \quad (30)$$

$$\text{где } \text{Res}F(a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^m} \left[(z-a)^m \cdot F(z) \right]. \quad (31)$$

Контур интегрирования в (30) можно выбрать в виде полуокружности в правой полуплоскости, примыкающей к мнимой оси (рис. 1). Полюса функций $V(z), E(z)$ находятся в левой полуплоскости вследствие устойчивости рассматриваемых ПФ, поэтому внутрь контура попадают только полюса функции $V(-z)$, равные $-s_k$.

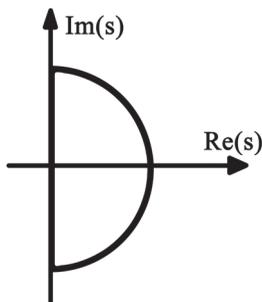


Рис. 1. Контур интегрирования на комплексной плоскости для вычисления интеграла (30)

Полюса функций $V(z), E(z)$ находятся в левой полуплоскости благодаря устойчивости рассматриваемых ПФ, поэтому внутрь контура попадают только полюса функции $V(-z)$, равные $-s_k$. Выбрав

достаточно большой радиус полуокружности на рисунке 1, интегралом по ее дуге можно пренебречь вследствие порядка подынтегральной функции и порядка длины окружности $\sim |s|$. Тогда при оценке (29) учитывать только вычеты в (22), получив окончательное выражение:

$$\langle e \cdot r \rangle = \sum_{k=1}^n \text{Res} E(z_k) \cdot V(-z_k). \quad (32)$$

Следовательно, вычисление скалярного произведения (24) можно реализовать по формуле (31), используя значения функций в точках полюсов текущей дробно-рациональной аппроксимации.

Отметим, что выражение (32) справедливо и применимо также в случае, когда $E(s)$ не является дробно-рациональной функцией.

4. Алгоритмы решения задач аппроксимации. Применение представленных алгоритмов к решению задач (5-9) рассматривается далее в порядке «от простого к сложному».

4.1. Скалярная задача аппроксимации ПФ. Вначале мы представим решение задачи определения числителя ПФ при известном знаменателе (7, 13). В этом случае в (23) отсутствуют члены от знаменателя $b_i \cdot v_i(t)$ (они включаются в функцию $g(t)$), и задача (7) практически совпадает с представленной ранее общей задачей (18) при $c_i = b_i, f_i(t) = v_i(t)$. Задача (13) представляется K независимыми задачами (18) для каждой ПФ.

Задача (5) совпадает с (17), если произвольно задать общую нумерацию всех искомым коэффициентов числителя и знаменателя и присвоить выбранные номера соответствующим коэффициентам и функциям – $a_i, b_i, u_i(t), v_i(t)$.

Задача (6) определяет коэффициенты знаменателя, но произвольная нумерация недопустима, так как искомые коэффициенты должны иметь индексы в пределах текущего значения порядка знаменателя. Поэтому для решения (6) с помощью (14) предложена следующая нумерация коэффициентов и функций на четном и нечетном шагах решения задачи (18):

$$\begin{aligned} c_{2i+1} &= b_i & f_{2i+1} &= v_i \\ c_{2i+2} &= a_{i-1} & f_{2i+2} &= u_{i-1} \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, \bar{n}). \quad (33)$$

То есть при решении задачи (18) последовательность шагов в (16, 11) определяется следующим образом:

– операции на нечетном шаге $(2i + 1)$ обеспечивают вычисление очередного i -го коэффициента знаменателя при найденных $(i - 2)$ -х коэффициентах числителя;

– операции на четном шаге $(2i + 2)$ обеспечивают вычисление последнего $(i - 1)$ -го коэффициента числителя при данном знаменателе.

Таким образом, если условие завершения процесса выполнилось на нечетном шаге, то для получения корректного решения задачи (6) нужно сделать еще один шаг в просмотре последовательности (33).

4.2. Решение векторных задач. При анализе векторных задач типа (11, 12) мы будем полагать единичное значение всех весовых коэффициентов из (8) $w_k = 1$. Это предположение не ограничивает общности рассмотрения, так как оно эквивалентно делению всех коэффициентов числителя $\bar{P}^{(k)}(s)$ исходной ПФ на весовой коэффициент w_k .

Рассмотрим использование линейной свертки частных показателей (9), при котором векторные задачи типа (11, 12) решаются обобщением соответствующих скалярных задач.

Линеаризованные отклонения переходных характеристик (23) для k -й ПФ запишутся в виде:

$$\Delta h^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{m^{(k)}} a_i^{(k)} \cdot u_i(t) - \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i(t) - g^{(k)}(t), \quad (34)$$

где $u_i^{(k)}(t)$, $g^{(k)}(t)$ формируются на основе (21), (22) подстановкой вместо $P_{init}(s)$, $Q_{init}(s)$ соответствующих полиномов для начальной аппроксимации k -й ПФ $P_{init}^{(k)}(s)$, $Q_{init}^{(k)}(s)$.

Выражение (34) можно представить в векторной форме как:

$$\Delta h^{(**)}(t) = \sum_{i=1}^{m^{(k)}} a_i^{(k)} \cdot u_i^{(**)}(t) - \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i^{(**)}(t) - g^{(**)}(t). \quad (35)$$

Здесь $v_i^{(**)}$ – вектор, каждая из K компонент которого – это $v_i(t)$. Суммарный показатель (9) с учетом (4) запишется в виде квадрата нормы отклонения вектор-функции $\Delta h^{(**)}$:

$$\Psi^{\text{sum}} = \sum_{k=1}^K \left\| \Delta h^{(k)} \right\|^2 = \left\| \Delta h^{(**)} \right\|^2. \quad (36)$$

То есть, как и в скалярном случае (6), критерий (12) также принимает вид минимума квадратичной нормы ошибки (36), что позволяет совместно с (35) практически полностью использовать скалярные алгоритмы минимизации для задач (11) и (12). При этом скалярное произведение векторов (15) будет иметь обобщенный вид:

$$\langle x^{(\dots)} \cdot y^{(\dots)} \rangle = \sum_{k=1}^K \langle x^{(k)} \cdot y^{(k)} \rangle.$$

Для решения задачи (12) последовательность ортогонализации соответствует (33) с учетом, что после определения очередного коэффициента знаменателя требуется вычисление последнего ($i-1$)-го коэффициента числителя для каждой из всех K ПФ. Соответствующий порядок следования коэффициентов полиномов иллюстрируется следующим выражением:

$$\begin{array}{lll} c_{K'i+1} = b_{i+1} & f_{K'i+1} = v_{i+1} & \\ c_{K'i+2} = a_i^{(1)} & f_{K'i+2} = u_{i-1}^{(*1)} & (i = 0, 1, \dots) \\ \dots & \dots & (m = 1, 2, \dots, K) \\ c_{K'i+m'} = a_i^{(m)} & f_{K'i+m'} = u_{i-1}^{(*m)} & K' = K + 1, \\ \dots & \dots & m' = m + 1 \\ c_{K'(i+1)} = a_i^{(K)} & f_{K'(i+1)} = u_{i-1}^{(*K)} & \end{array}.$$

Таким образом, задача (11) с суммарным критерием (9) будет решена.

Более сложными для построения алгоритмов являются векторные задачи с минимаксной сверткой частных показателей оптимизации (10). Рассмотрим проверку оптимальности решения (11) при таком критерии. Для заданной системы назовем ПФ с номером p критической, если ее ошибка максимальна среди всех ПФ:

$$e^{(p)}(a^{(p)}, m^{(p)}, b, n) \geq e(a^{(k)}, m^{(k)}, b, n), k \neq p.$$

Легко показать справедливость следующего условия. Векторная ПФ с общими коэффициентами знаменателя b является решением задачи (11), если:

- критическая ПФ оптимальна в скалярном смысле (5) по коэффициентам числителя и знаменателя;
- остальные ПФ с тем же знаменателем оптимальны по своим коэффициентам числителя (7).

Это условие является достаточным, то есть, его невыполнение не свидетельствует о неоптимальности решения. Но на его основе можно предложить следующий упрощенный алгоритм решения задачи (11):

1. Для каждой ПФ ($i = 1, 2, \dots, K$):

1.1. Решить задачу (5), найти и занести в таблицу 1 коэффициенты знаменателя:

$$b[i] = \underset{b}{\operatorname{argmin}}(e(a, n, b, n)), \quad n = n - 1.$$

1.2. Для каждой ПФ ($j = 1, 2, \dots, K$):

Для найденных коэффициентов знаменателя решить задачу (7), найти и занести в таблицу 2 коэффициенты числителя и результирующую ошибку:

$$a[i, j] = \underset{a}{\operatorname{argmin}}(e(a, n, b[i], n)), e[i, j] = e(a[i, j], n, b[i], n).$$

1.3. В столбце таблицы 2 определить ПФ с максимальной ошибкой, занести в таблицу 3 величину ошибки и номер столбца в таблице 1:

$$J[i] = \underset{j}{\operatorname{argmax}}(e[i, j]), E[i] = e[i, J[i]].$$

2. В таблице 3 определить индекс ПФ с минимальной ошибкой и взять в таблице 1 общие коэффициенты знаменателя для векторной ПФ:

$$I = \underset{i}{\operatorname{argmin}}(E[i]), \mathbf{b} = a[I].$$

Для каждой ПФ ($j = 1, 2, \dots, K$) из найденного столбца таблицы 2:

Взять коэффициенты числителя j -й ПФ из этого столбца:

$$a[j] = a[I, j].$$

Полученное решение $b, a[\dots]$ в общем случае не является оптимальным, однако оно приближено к оптимальному решению. Так или иначе найденное решение можно использовать как начальное приближение при применении методов решения общих квадратичных [28] или минимаксных [29] задач оптимизации. В рамках таких методов на этапе локального поиска могут применяться и другие элементы предложенных подходов.

4.3. Дальнейшее развитие предложенных алгоритмов.

Представляет интерес распространение рассмотренных подходов на линейные динамические системы с задержками. Исходные ПФ таких систем содержат экспоненциальные коэффициенты при дробно-рациональных множителях (рационально-экспоненциальные функции). Поэтому для дробно-рациональной аппроксимации таких ПФ в рамках предложенного подхода необходимо при проведении процесса проектирования (17) корректно вычислять скалярные произведения вида $d_i = \langle g \cdot z_i \rangle$ с оригиналом нерациональной функции $g(t)$. Для этого можно воспользоваться выражением (30), (31), учитывая простоту вычисления полюсов в случае рационально-экспоненциальных функций.

Учитывая, что использование предлагаемых в статье векторных критериев могут приводить к ошибкам и потерям при решении задач управления динамическими системами [30], целесообразно также исследовать другие варианты свертки частных показателей оптимизации.

5. Численные эксперименты. Проверка предложенного подхода выполнялась на основе экспериментальной программы аппроксимации скалярных ПФ. Проанализированы публикации и выбран ряд тестовых задач с известными ПФ для реализации с помощью разработанной программы. Полученные результаты подтвердили практическую эффективность представленных алгоритмов. В качестве тестовых задач использовались практические примеры линейных электронных схем, включающих как активные (усилительные), так и пассивные RLC схемы, которые содержат сопротивления, емкости, индуктивности с различным распределением действительных и комплексно-сопряженных полюсов ПФ. Выполнялось сравнение с известными методами редуцирования. Оценивались такие свойства алгоритма, как сохранение устойчивости схем со сложными частотными ПФ и способность к автоматическому определению порядка модели. В качестве примеров

выбраны линейные электронные схемы, перечисленные в порядке представления результатов:

1. Пассивная RLC схема.
2. RLC эквивалент длинной линии.
3. RC-дерево.
4. Универсальный интегральный операционный усилитель $\mu 741$, содержащий активные приборы (транзисторы).

Таблица 1 содержит результаты редуцирования порядка ПФ (по критерию **В**) для тестовых примеров. Для каждого примера указаны в виде m/n порядки числителя (m) и знаменателя (n) его исходной ПФ. Далее в строке приведены характеристики полученной редуцированной ПФ при задании различных значений допустимой погрешности (вторая строка сверху): порядки числителя/знаменателя и величина погрешности в процентах от величины допуска. Видно, что полученная погрешность находится в пределах 6-90% от величины допуска, что свидетельствует о состоятельности алгоритма.

Таблица 1. Характеристики редуцированных ПФ

№ п/п	Исходная ПФ	Значения относительного допуска:							
		10^{-1}		10^{-3}		10^{-5}		10^{-7}	
		m/n	%	m/n	%	m/n	%	m/n	%
1	4/12	3/3	70	2/8	30	4/8	3	6/10	6
2	6/10	0/1	30	1/7	40	2/8	10	4/10	20
3	0/17	1/2	20	3/3	90	3/5	50	4/6	40
4	0/22	0/1	90	1/3	50	2/3	70	3/3	40

Для примеров 1-3 на рисунках 2-6 приведены графики с результатами моделирования в частотной (модуль ПФ) и временной (переходные характеристики) областях. На каждом рисунке показаны две кривые: исходной (1) и аппроксимированной (2) ПФ при относительном допуске 0,1. Выводились также графики при относительном допуске 10^{-7} , но они при выбранном масштабе неотличимы от графиков исходной ПФ. Из рисунков 2, 3, 5 видно, что достаточно грубая аппроксимация (10%) приводит к сглаживанию колебательного характера переходных характеристик исходной ПФ.

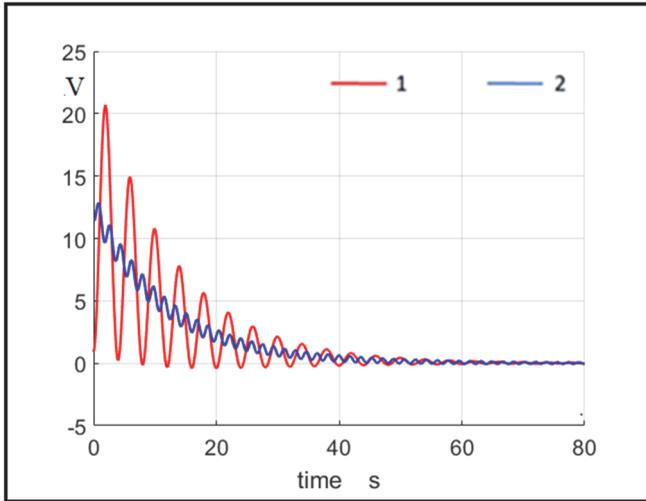


Рис. 2. Переходные характеристики для примера 1

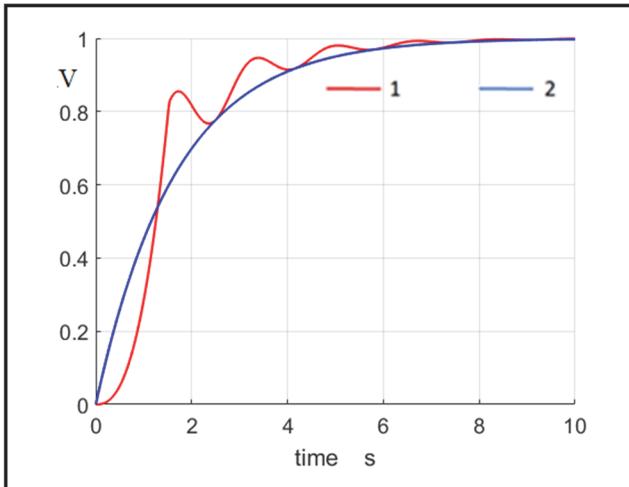


Рис. 3. Переходные характеристики для примера 2

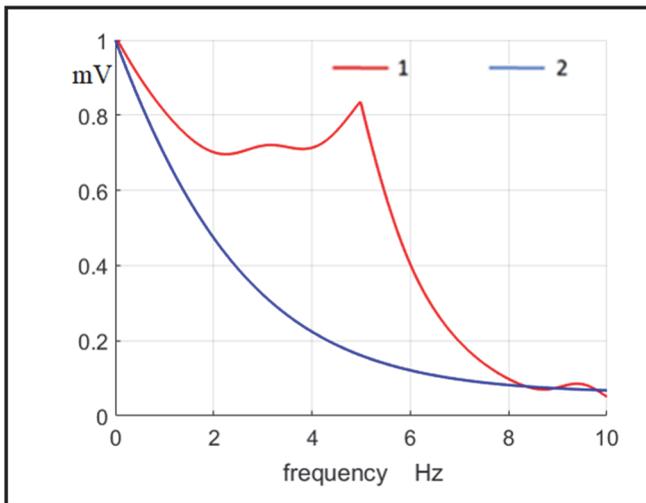


Рис. 4. Частотные ПФ для примера 2

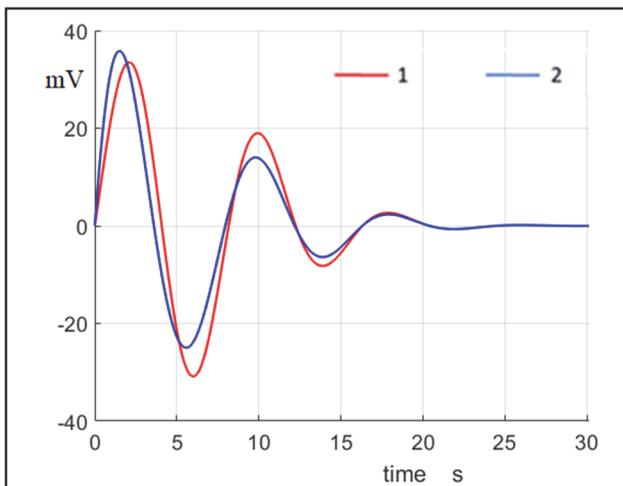


Рис. 5. Переходные характеристики для примера 3

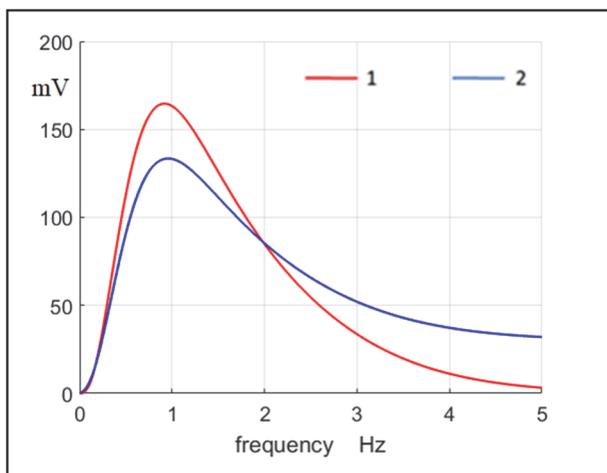


Рис. 6. Частотные ПФ для примера 3

6. Заключение. Предложен подход к задаче понижения порядка дробно-рациональной передаточной функции динамической системы, разработаны алгоритмы его реализации.

Для оценки близости исходной и аппроксимированной ПФ предложено отказаться от суммарной оценки их отклонений в заранее определенном множестве дискретных точек, а использовать интегральную норму отклонений переходных характеристик этих ПФ на временной полуоси. Такой подход позволяет отказаться от предварительного задания множества узловых точек и исключить ошибки, связанные с отсутствием или недостаточным количеством точек вблизи важных полюсов ПФ.

При постановке оптимизационных задач определения параметров аппроксимации в качестве основной задачи рассматривается минимизация порядка ПФ при заданном допуске на погрешность аппроксимации. Такая постановка, в отличие от традиционной минимизации погрешности, соответствует задачам автоматического определения порядка аппроксимированной модели с минимальной избыточностью.

Квадратичный вид нормы ошибки позволяет ориентироваться на применение МНК для решения оптимизационной задачи. Учитывая нелинейную зависимость ПФ от коэффициентов знаменателя, предложено использование итерационного процесса Гаусса – Ньютона.

На каждом шаге процесса производится линеаризация отклонения переходных характеристик ПФ и решается квадратичная задача с помощью МНК в функциональном пространстве. Получены выражения для расчета коэффициентов линеаризованных зависимостей.

Предложен способ реализации МНК на основе ортогонализации Грама – Шмидта для минимизации длины вектора параметров при заданной норме ошибки. При ортогонализации используются полученные выражения для расчета скалярных произведений по вычетам ПФ в лапласовской области.

Определена последовательность шагов ортогонализации, соответствующих вычислению коэффициентов числителя и знаменателя ПФ для корректного решения задачи минимизации порядка ПФ.

Предложено обобщение разработанного скалярного алгоритма на случай векторной ПФ для моделей многопортовых систем при оценке погрешности векторной аппроксимации как взвешенной суммы погрешностей для всех ПФ.

Рассмотрена возможность использования минимаксной оценки погрешности векторной ПФ. Дано достаточное условие оптимальности, проверяемое на основе предложенного подхода, и представлен простейший алгоритм решения задачи на его основе. Показано, что разработка подробного алгоритма требует использования методов квадратичного программирования.

Были проведены численные расчеты на тестовых примерах различных типов, которые подтвердили применимость предложенного подхода и его вычислительную эффективность.

Основным ограничением предложенного подхода и алгоритмов, разработанных на его основе, является их неприменимость к системам с распределенными параметрами и к системам с нелинейными блоками.

Следующие разработки будут посвящены распространению подхода на линейные динамические системы с запаздываниями, ПФ которых содержат экспоненциальные коэффициенты при дробно-рациональных множителях.

Литература

1. *Benner P., Cohen A, Ohlberger M., Willcox K.* Model reduction and approximation: theory and algorithms // *Computational Science and Engineering*. 2017. vol. 15. 412 p.
2. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем // М.: Наука. 1985. 351 с.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы // М. Физматлит. 2016. Т. 2. 441 с.
4. *Antoulas A.C. et al.* Model Order Reduction: Methods, Concepts and Properties // *Coupled Multiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics*. 2015. pp. 159–265.

5. *Vishwakarma C.B., Prasad R.* Time domain model order reductions using Hankel Matrix Approach // Journal of Franklin Institute. 2014. vol. 351. pp. 3445–3456.
6. *Alsmadi O.M.K., Abo-Hammour Z.S.* Substructure Preservation Model Order Reduction with Power System Model Investigation // Wulfenia journal. 2015. vol. 22(3). pp. 44–55.
7. *Harutyunyan D. et al.* Advanced Topics in Model Order Reduction // Coupled Multiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics. 2015. pp. 361–432.
8. *Benner P., Hinze M., ter Maten E.J.W.* Model Reduction for Circuit Simulation // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2011. vol. 74. 317 p.
9. *Hochman A. et al.* Reduced order models for electromagnetics // IEEE Transactions Antennas and Propagation. 2014. vol. 62. no. 6. pp. 3150–3162.
10. *Romano D., Antonini G., Grossner U., Kovacevic-Badstuebner I.F.* Circuit synthesis techniques of rational models of electromagnetic systems: A tutorial paper // International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields. 2019. vol. 32. no. 5. pp. e2612.
11. *Benner P., Gugercin S., Willcox K.* A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems // SIAM Review. 2015. vol. 57. no. 4. pp. 483–531.
12. *Bai Z.* Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems // Applied Numerical Mathematics. 2002. vol. 43. no. 1-2. pp. 9–44.
13. *Heres P.J., Schilders W.H.A.* Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction // Scientific Computing in Electrical Engineering. 2006. vol. 9. pp. 39–43.
14. *Zimmerling J., Druskin V., Zaslavsky M., Remis R.F.* Model-order reduction of electromagnetic fields in open domains // Geophysics. 2018. vol. 83(2). pp. WB61-WB70.
15. *Rusakov S.G., Gourary M.M., Ulyanov S.L., Zharov M.M.* The Concept of Redundancy for Techniques of Model Order Reduction in Circuit Simulation // International Conference “Mathematical and Informational Technologies” (MIT-2013). 2014. pp. 260–266.
16. *Phillips J.R., Silveira L.M.* Poor Man’s TBR: a simple model reduction scheme // IEEE Transactions on Computer-aided Design. 2005. vol. 24. no. 1. pp. 43–55.
17. *Гурпуй М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.И.* Редукция модели электрической схемы с учетом характеристик внешних цепей // Информационные технологии. 2018. Т. 24. № 9. С. 563–572.
18. *Bañuelos-Cabral E.S., Gutiérrez-Robles J.A., Gustavsen B.* Rational Fitting Techniques for the Modeling of Electric Power Components and Systems Using MATLAB environment // Rational Fitting Techniques for the Modeling of Electric Power Components and Systems Using MATLAB Environment. 2017. pp. 1–46.
19. *Coelho C.P., Phillips J.R., Silveira L.M.* Robust raional function approximation algorithm for model generation // Proceedings of the 36th annual ACM/IEEE Design Automation Conference. 1999. pp. 207–212.
20. *Knockaert L., Ferranti F., Dhaene T.* Vector Fitting vs. Levenberg-Marquardt: Some experiments // 2009 IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI). 2009. pp. 1–4.
21. *Singh R., Chatterjee K., Singh J.* A Mixed Approach for Approximation of Higher Order Linear Time Invariant Systems // International Journal of Engineering & Technology. 2018. vol. 7. no. 4.39. pp. 375–380.
22. *Singh J., Chatterjee K., Vishwakarma C.B.* Model order reduction using eigen algorithm // International Journal of Engineering, Science and Technology. 2015. vol. 7. no. 3. pp. 17–23.

23. Rao P.S., Prasad R. Stable Mixed Reduced Order Models for Linear Dynamic Systems and their Qualitative Comparison // 2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES). 2016. pp. 1–4.
24. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука. 1966. 752 с.
25. Голуб Д., Ван Л.Ч. Матричные вычисления // М.: Мир. 1999. 548 с
26. Крянев А.В., Лукин Г.В., Давид У. Метрический анализ и обработка данных // М.: Физматлит. 2012. 280 с.
27. Плескунов М.А., Короткий А.И. Операционное исчисление. Учебное пособие для вузов // М.: Юрайт. 2018. 141 с.
28. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи. Учебное пособие // М.: Ленанд. 2018. 344 с.
29. Гурарий М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Минимаксная оптимизация в задачах схемотехнического проектирования // Информационные технологии. 2018. Т. 24. № 7. С. 435–444.
30. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений // М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. 584 с.

Гурарий Марк Моисеевич — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, Отдел систем автоматизированного проектирования интегральных схем (Отдел САПР), Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН). Область научных интересов: электронные схемы, система дифференциально-алгебраических уравнений, вычислительные алгоритмы. Число научных публикаций — 40. gourary@yandex.ru; ул. Советская, 3, 124365, Москва, Зеленоград, Россия; р.т.: +7(499)1353383.

Русаков Сергей Григорьевич — д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник - советник научного руководителя, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН). Область научных интересов: математическое моделирование, вычислительные методы моделирования электрических характеристик, САПР СБИС, автоматизация схемотехнического проектирования, методы редукции математических моделей. Число научных публикаций — 144. rusakov@iprm.ru; ул. Советская, 3, 124365, Москва, Зеленоград, Россия; р.т.: +7(499)1353383.

Жаров Михаил Михайлович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, отдел систем автоматизированного проектирования интегральных схем (Отдел САПР), Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН). Область научных интересов: многопортовые линейные динамические системы, модальная редукция, отношение Релея. Число научных публикаций — 35. zagov@iprm.ru; ул. Советская, 3, 124365, Москва, Зеленоград, Россия; р.т.: +7(499)1353383.

Ульянов Сергей Леонидович — д-р техн. наук, главный научный сотрудник, отдел систем автоматизированного проектирования интегральных схем (Отдел САПР), Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН). Область научных интересов: схемотехническое моделирование, автоматизация проектирования, математические модели полупроводниковых приборов. Число научных публикаций — 80. ulyas@iprm.ru; ул. Советская, 3, 124365, Москва, Зеленоград, Россия; р.т.: +7(499)1353383.

M. GOURARY, S. RUSAKOV, M. ZAROV, S. ULYANOV
**COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR REDUCING RATIONAL
TRANSFER FUNCTIONS' ORDER**

Gourary M., Rusakov S., Zarov M., Ulyanov S. **Computational Algorithms for Reducing Rational Transfer Functions' Order.**

Abstract. A problem of reducing a linear time-invariant dynamic system is considered as a problem of approximating its initial rational transfer function with a similar function of a lower order. The initial transfer function is also assumed to be rational. The approximation error is defined as the standard integral deviation of the transient characteristics of the initial and reduced transfer function in the time domain. The formulations of two main types of approximation problems are considered: a) the traditional problem of minimizing the approximation error at a given order of the reduced model; b) the proposed problem of minimizing the order of the model at a given tolerance on the approximation error.

Algorithms for solving approximation problems based on the Gauss-Newton iterative process are developed. At the iteration step, the current deviation of the transient characteristics is linearized with respect to the coefficients of the denominator of the reduced transfer function. Linearized deviations are used to obtain new values of the transfer function coefficients using the least-squares method in a functional space based on Gram-Schmidt orthogonalization. The general form of expressions representing linearized deviations of transient characteristics is obtained.

To solve the problem of minimizing the order of the transfer function in the framework of the least squares algorithm, the Gram-Schmidt process is also used. The completion criterion of the process is to achieve a given error tolerance. It is shown that the sequence of process steps corresponding to the alternation of coefficients of polynomials of the numerator and denominator of the transfer function provides the minimum order of transfer function.

The paper presents an extension of the developed algorithms to the case of a vector transfer function with a common denominator. An algorithm is presented with the approximation error defined in the form of a geometric sum of scalar errors. The use of the minimax form for error estimation and the possibility of extending the proposed approach to the problem of reducing the irrational initial transfer function are discussed.

Experimental code implementing the proposed algorithms is developed, and the results of numerical evaluations of test examples of various types are obtained.

Keywords: Linear Systems, Model Reduction, Transfer Function, Rational Approximation.

Gourary Mark — Ph.D., Senior Researcher, Department of Computer-Aided IC Design (The CAD Department), Federal State-Funded Institution of Science Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Research interests: electronic circuits, periodic modes, oscillators, systems of differential-algebraic equations, computational algorithms. The number of publications — 40. gourary@yandex.ru; 3, Sovetskaya str., 124365, Moscow, Zelenograd, Russia; office phone: +7(499)1353383.

Rusakov Sergey — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher, Federal State-Funded Institution of Science Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Research interests: mathematical modeling, computational methods for modeling characteristics, CAD VLSI, automation circuit design, methods for reducing mathematical models. The number of

publications — 144. rusakov@ippm.ru; 3, Sovetskaya str., 124365, Moscow, Zelenograd, Russia; office phone: +7(499)1353383.

Zharov Mikhail — Ph.D., Senior Researcher, Department of Computer-Aided IC Design (The CAD Department), Federal State-Funded Institution of Science Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Research interests: multiport linear dynamic systems, modal reduction, Rayleigh relation. The number of publications — 35. zarov@ippm.ru; 3, Sovetskaya str., 124365, Moscow, Zelenograd, Russia; office phone: +7(499)1353383.

Ulyanov Sergey — Ph.D., Dr.Sci., Chief Researcher, Department of Computer-Aided IC Design (The CAD Department), Federal State-Funded Institution of Science Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Research interests: circuit simulation, design automation, mathematical models of semiconductor devices. The number of publications — 80. ulyas@ippm.ru; 3, Sovetskaya str., 124365, Moscow, Zelenograd, Russia; office phone: +7(499)1353383.

References

1. Benner P., Cohen A, Ohlberger M., Willcox K. Model reduction and approximation: theory and algorithms. Computational Science and Engineering. 2017. vol. 15. 412 p.
2. Voronov A.A. *Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravlyaemykh sistem* [Introduction to the Dynamics of Complex Controlled Systems]. M. : Nauka. 1966. 351p. (In Russ.).
3. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Mnogomernye, nelinejnye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Theory of automatic control. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. M.: Fizmatlit. 2016. vol. 2. 441 p. (In Russ.).
4. Antoulas A.C. et al. Model Order Reduction: Methods, Concepts and Properties. Coupled Multiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics. 2015. pp. 159–265.
5. Vishwakarma C.B., Prasad R. Time domain model order reductions using Hankel Matrix Approach. *Journal of Franklin Institute*. 2014. vol. 351. pp. 3445–3456.
6. Alsmadi O.M.K., Abo-Hammour Z.S. Substructure Preservation Model Order Reduction with Power System Model Investigation. *Wulfenia journal*. 2015. vol. 22(3). pp. 44–55.
7. Harutyunyan D. et al. Advanced Topics in Model Order Reduction. Coupled Multiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics. 2015. pp. 361–432.
8. Benner P., Hinze M., ter Maten E.J.W. Model Reduction for Circuit Simulation. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2011. vol. 74. 317 p.
9. Hochman A. et al. Reduced order models for electromagnetics. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*. 2014. vol. 62. no. 6. pp. 3150–3162.
10. Romano D., Antonini G., Grossner U., Kovacevic-Badstuebner I.F. Circuit synthesis techniques of rational models of electromagnetic systems: A tutorial paper. *International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields*. 2019. vol. 32. no. 5. pp. e2612.
11. Benner P., Gugercin S., Willcox K. A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems. *SIAM Review*. 2015. vol. 57. no. 4. pp. 483–531.
12. Bai Z. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*. 2002. vol. 43. no. 1-2. pp. 9–44.
13. Heres P.J., Schilders W.H.A. Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction. Scientific Computing in Electrical Engineering. 2006. vol. 9. pp. 39–43.

14. Zimmerling J., Druskin V., Zaslavsky M., Remis R.F. Model-order reduction of electromagnetic fields in open domains. *Geophysics*. 2018. vol. 83(2). pp. WB61-WB70.
15. Rusakov S.G., Gourary M.M., Ulyanov S.L., Zharov M.M. The Concept of Redundancy for Techniques of Model Order Reduction in Circuit Simulation. International Conference “Mathematical and Informational Technologies” (MIT-2013). 2014. pp. 260–266.
16. Phillips J.R., Silveira L.M. Poor Man’s TBR: a simple model reduction scheme. *IEEE Transactions on Computer-aided Design*. 2005. vol. 24. no. 1. pp. 43–55.
17. Gourary M.M., Zharov M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L. [Model Order Reduction of Electrical Circuits Taking Account of External Networks Characteristics]. *Informacionnye tekhnologii – Information Technology*. 2018. Issue 24. vol. 9. pp. 563–572. (In Russ.).
18. Bañuelos-Cabral E.S., Gutiérrez-Robles J.A., Gustavsen B. Rational Fitting Techniques for the Modeling of Electric Power Components and Systems Using MATLAB environment. Rational Fitting Techniques for the Modeling of Electric Power Components and Systems Using MATLAB Environment. 2017. pp. 1–46.
19. Coelho C.P., Phillips J.R., Silveira L.M. Robust raional function approximation algorithm for model generation. Proceedings of the 36th annual ACM/IEEE Design Automation Conference. 1999. pp. 207–212.
20. Knockaert L., Ferranti F., Dhaene T. Vector Fitting vs. Levenberg-Marquardt: Some experiments. 2009 IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI). 2009. pp. 1–4.
21. Singh R., Chatterjee K., Singh J. A Mixed Approach for Approximation of Higher Order Linear Time Invariant Systems // *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. vol. 7. no. 4.39. pp. 375–380.
22. Singh J., Chatterjee K., Vishwakarma C.B. Model order reduction using eigen algorithm. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2015. vol. 7. no. 3. pp. 17–23.
23. Rao P.S., Prasad R. Stable Mixed Reduced Order Models for Linear Dynamic Systems and their Qualitative Comparison. 2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES). 2016. pp. 1–4.
24. Besekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya*. [Theory of Automatic Control Systems]. M.: Nauka. 1966. 752 p. (In Russ.).
25. Golub G., Van L.Ch. *Matrichnye vychisleniya* [Matrix Computations]. M.: Mir. 1999. 548 p. (In Russ.).
26. Krjanev A.V., Lukin G.V., David U. *Metricheskij analiz i obrabotka damnyh* [Metric analysis and data processing]. M.: Fizmatlit. 2012. 280 p. (In Russ.).
27. Pleskunov M.A., Korotkiy A.I. *Operacionnoe ischislenie. Uchebnoe posobie dlya vuzov*. [Operational calculus. Textbook for universities]. M.: Yurajt. 2018. 141p. (In Russ.).
28. Galeev E.M. *Optimizaciya. Teoriya, primery, zadachi. Uchebnoe posobie*. [Optimization. Theory, examples, tasks. Textbook]. M.: Lenand. 2018. 344p. (In Russ.).
29. Gourary M.M., Zharov M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L. [Minimax Optimization in Circuit Design Problems]. *Informacionnye tekhnologii – Information Technology*. 2018. Issue 24. vol. 7. pp. 435–444. (In Russ.).
30. Greshilov A.A. *Matematicheskie metody prinyatiya reshenij* [Mathematical Decision-Making Methods]. M.: MGTU im. N.E. Baumana. 2016. 584 p. (In Russ.).