

С.В. ДВОРНИКОВ, С.С. ДВОРНИКОВ, А.А. УСТИНОВ
**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ
КРАТНОМАСШТАБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПОВЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Дворников С.В., Дворников С.С., Устинов А.А. **Корреляционные свойства коэффициентов кратномасштабного преобразования типовых изображений.**

Аннотация. Увеличивающийся поток фото и видеоинформации, передаваемый по каналам инфокоммуникационных систем и комплексов, стимулирует к поиску эффективных алгоритмов сжатия, позволяющих существенно снизить объем передаваемого трафика, при сохранении его качества. В общем случае, в основе алгоритмов сжатия лежат операции преобразования коррелированных значений яркостей пикселей матрицы изображения в их некоррелированные параметры, с последующим кодированием полученных коэффициентов преобразования. Поскольку основные известные декоррелирующие преобразования являются квазиоптимальными, то задача поиска преобразований, учитывающих изменения статистических характеристик сжимаемых видеоданных, все еще является актуальной. Указанные обстоятельства определили направление проведенного исследования, связанного с анализом декоррелирующих свойств формируемых вейвлет-коэффициентов, получаемых в результате кратномасштабного преобразования изображений. Основным результатом проведенного исследования явилось установление факта того, что вейвлет-коэффициенты кратномасштабного преобразования имеют структуру вложенных матриц, определенных как субматрицы. Поэтому, корреляционный анализ вейвлет-коэффициентов преобразования, целесообразно проводить раздельно для элементов каждой субматрицы на каждом уровне декомпозиции (разложения). Основным теоретическим результатом явилось доказательство того, что ядром каждого последующего уровня кратномасштабного преобразования является матрица, состоящая из вейвлет-коэффициентов предшествующего уровня декомпозиции. Именно данный факт и позволяет сделать вывод о зависимости соответствующих элементов соседних уровней. Кроме того, установлено, что между вейвлет-коэффициентами внутри локальной области изображения размером 8×8 пикселей существует линейная зависимость. При этом максимальная корреляция элементами субматриц непосредственно определяется формой их представления, и наблюдается между соседними элементами находящимися, соответственно в строке, столбце или по диагонали, что подтверждается характером рассеивания. Полученные результаты подтверждены на проведенном анализе выборок, более чем из двухсот типовых изображений. При этом обосновано, что между низкочастотными вейвлет-коэффициентами кратномасштабного преобразования верхнего уровня разложения сохраняются примерно одинаковые зависимости равномерно по всем направлениям. Практическая значимость исследования определяется тем, что все полученные в ходе его проведения результаты подтверждают наличие характерной зависимости между вейвлет-коэффициентами преобразования на различных уровнях разложения изображений. Данный факт указывает на возможность достижения более высоких значений коэффициентов сжатия видеоданных в процессе их кодирования. Дальнейшие исследования авторы связывают с разработкой математической модели адаптивного арифметического кодирования видеоданных и изображений, учитывающей корреляционные свойства вейвлет-коэффициентов кратномасштабного преобразования.

Ключевые слова: сжатие изображений, вейвлет-коэффициенты кратномасштабного преобразования, преобразование коррелированных значений, декоррелирующие преобразования.

1. Введение. В настоящее время в основе всех известных алгоритмов сжатия видеоданных лежит выполнение двух основных операций [1-4]: преобразование коррелированных значений яркостей пикселей матрицы изображения в их некоррелированные параметры – коэффициенты преобразования; кодирование коэффициентов преобразования [5, 6].

Основной задачей первой операции является получение коэффициентов преобразования, характеризующихся неравномерным распределением значений их абсолютных значений. При этом значения коэффициентов перераспределяется так, что при кодировании существенной их части, в ходе выполнения второй операции, используют незначительное число битов, либо вообще отказываются от кодирования коэффициентов преобразования, приравнивая их к нулю, что обеспечивает сжатие изображений [7, 8].

Основные декоррелирующие преобразования, используемые в настоящее время в различных стандартах сжатия, известны и достаточно хорошо исследованы. К таким преобразованиям относятся дискретное косинусное преобразование [9] и различные виды вейвлет-преобразований [3]. В работах [9, 10] показано, что данные преобразования являются квазиоптимальными с позиций перераспределения энергии, характерных для большинства типовых изображений. Кроме того, задача построения нового класса преобразований, учитывающих локальные изменения статистических характеристик сжимаемых изображений, является сложнейшей задачей и в настоящее время не решена.

С другой стороны, существующие методы кодирования, в том числе и арифметическое кодирование [4, 11], разрабатывались как методы кодирования последовательностей символов, то есть без учета того, каким образом эти последовательности были получены. Поэтому такое преобразование не учитывает их структурные особенности. Так, например, в большинстве случаев реализация арифметического кодирования учитывает только значения вероятностей кодируемых символов. При этом предполагается, что последующее построение кодеков, ориентированных на кодирование коэффициентов преобразования заданного вида, как раз и позволит получить большие значения коэффициентов сжатия [12].

В связи с этим основным содержанием данной статьи является представление результатов исследования свойств вейвлет-

коэффициентов, получаемых в результате кратномасштабного преобразования изображений, получившего широкое практическое применение в современных кодеках и рекомендациях [13-15].

2. Кратномасштабные преобразования на основе аналитического аппарата линейной алгебры. В общем случае, кратномасштабный анализ основан на последовательной декомпозиции сигнала (применительно к рассматриваемой тематике, далее по тексту – изображений) в ортогональном базисе вейвлетов, образованном путем временных сдвигов и кратномасштабных преобразований исходной порождающей функции [16]. В результате открывается возможность выделить характерные особенности исследуемых изображений в области локализации формирующих вейвлетов [17].

Теоретические основы кратномасштабного анализа как инструмента построения вейвлет-базисов в интересах анализа тонкой структуры изображений, были разработаны С. Малла и И. Мейром [18]. В теории вейвлетов понятие кратномасштабного анализа является фундаментальным [19], поскольку оно определило развитие нескольких направлений в радиотехнике и телекоммуникациях, связанных с обработкой и сжатием изображений.

Сущность кратномасштабного анализа основана на иерархическом представлении исходного пространства изображения $L^2(\mathbf{R})$ в виде упорядоченной системы вложенных субпространств $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$ [18], где $j \in \mathbf{Z}$, которые отличаются друг от друга значением масштабируемой переменной, что позволяет формируемые на каждом уровне декомпозиции пространства представлять следующим образом:

$$V_j(\mathbf{R}), j \in \mathbf{Z}.$$

В общем случае правомерность реализация кратномасштабного преобразования определяется выполнением шести базовых условий [18]:

вложенности, когда постановка $V_j \subset V_{j+1}$ справедлива для всех значений $j \in \mathbf{Z}$;

плотности и плотности разбиения, при котором $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$;

ортogonalности, т.е. $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = 0$;

сохранения в пределах субпространства при любых сдвигах функций, $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t+1) \in V_j$;

масштабирование любой функции $f(t) \in V_j$ по аргументу в два раза, перемещает функцию в соседнее субпространство, т.е. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$ и $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t/2) \in V_{j-1}$;

существования такой скейлинг-функции $r(t) \in V_0$, целочисленные сдвиги которой по аргументу образуют ортонормированный базис пространства V_0 : $f_{0,k}(t) = f(t-k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Тогда любую функцию $s(t)$ из пространства $L^2(\mathbf{R})$ можно представить совокупностью ее отображений $s_j(t)$ в каждом из вложенных субпространств таким образом, что:

$$s(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j(t), \quad j \in \mathbf{Z},$$

где параметр j фактически определяет размерность сформированного функционального базиса, т.е. глубину или точность детализации исходной функции $s(t)$ с использованием ее масштабированных копий.

Очевидно, что устремляя $j \rightarrow \infty$ можно обеспечить фактически полное восстановление исходного сигнала по его копиям. Однако такой подход не прагматичен, поскольку связан с большими объемами проводимых вычислений. Следовательно, необходим поиск компромиссных решений, позволяющих с одной стороны обеспечить требуемую точность восстановления (ошибку аппроксимации), а с другой – не превысить объем требуемого вычислительного ресурса.

В общем случае, процедура наращивания размерности функционального пространства является итерационной, и ее можно представить следующим выражением:

$$s_j(t) = \sum_j C(j, k) f_{j,k}(t), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Причем:

$$f_{0,0}(t) = 2 \sum_k h_k f(2t-k),$$

где h_k представляет собой некоторую последовательность, определяющую выбор требуемой (необходимой) масштабирующей функции из семейства всей совокупности базисных функций.

Таким образом, задача кратномасштабного анализа сводится к поиску значений совокупности $\{h_k\}_K$, где K – размерность, определяющая количество используемых коэффициентов, которые обеспечат аппроксимацию $s(t)$ с требуемой (допустимой) погрешностью.

Условиям кратномасштабного анализа в полной мере удовлетворяют вейвлет-функции [20], которые на базе исходного (материнского) вейвлета позволяют формировать иерархическое пространство путем последовательных сдвигов и масштабирования его аргумента.

Теоретическим обоснованием такого подхода послужили двуполярные вейвлеты Хаара [10], позволившие наглядно продемонстрировать возможность реализации кратномасштабных преобразований.

Действительно, реализация прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования на основе вейвлета Хаара обеспечивает полное восстановление сигнала при условии, что для целых значений k существуют коэффициенты $\{h_k\}_K$, которые удовлетворяют условию:

$$f(t/2) = \sqrt{2} \sum_k h_k f(t-k). \quad (2)$$

Уравнение (2) является основополагающим в теории вейвлет-преобразования [20], поскольку определяет механизм масштабирования.

Для вейвлета Хаара, решение уравнения (2) позволяет получить точные значения, характеризующие взаимосвязь между двумя соседними коэффициентами $h_{k=0}$ и h_{k+1} :

$$h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}.$$

Поскольку вейвлет Хаара является не единственно удовлетворяющим условию построения кратномасштабных пространств, то масштабирующее уравнение (2) может быть трансформировано к более удобному для алгоритмизации виду:

$$\frac{1}{2} f(x/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n f(x-n). \quad (3)$$

В уравнении (3) вместо коэффициентов $\{h_k\}_K$ введены коэффициенты вида v_n , что позволяет получить более значительно удобную нормировку формируемых вейвлетов, при условии, что переменная x интерпретирует переменную времени t .

Кратномасштабный подход лег в основу алгоритмов сжатия сигналов изображений, предполагающих последовательное представление образов с различной степенью их детализации. Это позволило для описания изображения любого вида использовать аппроксимирующие коэффициенты $a_{j+1,k}$ и детализирующие $d_{j+1,k}$.

Тогда вейвлет-представление (совокупность вейвлет-коэффициентов) некоторой функции $s(t)$, с глубиной разложения J можно формализовать в терминах аппроксимирующих $a_{j+1,k}$ и детализирующих $d_{j+1,k}$ коэффициентов следующим образом:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k \in Z} a_{j_0+J,k} f_{j_0+J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^J \sum_{k \in N} a_{j,k} \Psi_{j,k}(t). \quad (4)$$

В уравнении (4) обозначение $\hat{s}(t)$ указывает на то, что данная функция (сигнал) рассчитана по коэффициентам разложения исходного сигнала $s(t)$.

Прагматичность уравнения (4) определяет наличие быстрого алгоритма расчета его вейвлет-коэффициентов, определяемого в [20] как алгоритм Малла, согласно которого значения аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов могут быть рассчитаны в соответствии с:

$$a_{j+1,k} = \sum_n h_n a_{j,n+2k}, \quad d_{j+1,k} = \sum_n g_n a_{j,n+2k}. \quad (5)$$

В формуле (6) характер коэффициентов g_n аналогичен h_n , определяемых в выражении (2), т.е. это последовательность бинарных значений, используемая для выбора необходимых для восстановления сигналов аппроксимирующих коэффициентов.

Алгоритм восстановления сигнала по его вейвлет-коэффициентам определяется рекуррентным выражением вида:

$$a_{j,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j+1,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j+1,k}. \quad (6)$$

В [10] определены условия реализации прямого и обратного вейвлет-преобразования, положенных в основу алгоритмов сжатия изображений:

1. Общее количество N аппроксимирующих коэффициентов $a_{j,k}$ должно быть кратным значению два, т.е.:

$$N / 2^m = E, \quad (7)$$

где m и E – целые числа, причем $m > 0$.

Условие (7) позволяет определить начальное значение, так называемого, «нулевого» уровня декомпозиции:

$$N = 2^{j_0}, \text{ или } j_0 = \log_2 N.$$

2. В ходе реализации прямого вейвлет-преобразования, при каждом переходе с уровня j на вышестоящий уровень $j + 1$, происходит уменьшение в два раза общего числа аппроксимирующих $a_{j,k}$ и детализирующих $d_{j,k}$ коэффициентов.

3. В ходе реализации обратного вейвлет-преобразования, т.е. при переходе на более низкий уровень декомпозиции, т.е. с уровня j на вышестоящий уровень $j - 1$, наоборот, количество аппроксимирующих $a_{j,k}$ и детализирующих $d_{j,k}$ коэффициентов возрастает в два раза.

3. Кратномасштабное вейвлет-представление изображений.

Отличительной особенностью изображений является то, что они описываются посредством двумерных сигналов. Поэтому всякое изображение следует рассматривать как функцию двух переменных, т.е. $s(x, y)$. Следовательно, используемые для их обработки пространства, также должны быть двумерными, т.е. $L_2(R)$.

Так, базисные $f(x)$ и вейвлет $\psi(x)$ функции в результате преобразований порождают двумерное пространство:

$$L_2(R) : \{f_{j,n}(x)\}, \{\psi_{j,n}(x)\}.$$

Отметим, что тензорное произведение функций $f(x)$ и $\psi(x)$ приводит к формированию следующей комбинации базисных функций в пространстве $L_2(R^2)$:

$$\{ff_{j,n,m}(x, y) = f_{j,n}(x)f_{j,m}(y)\};$$

$$\{f\Psi_{j,n,m}(x,y) = f_{j,n}(x)\Psi_{j,m}(y)\};$$

$$\{\Psi f_{j,n,m}(x,y) = \Psi_{j,n}(x)f_{j,m}(y)\};$$

$$\{\Psi\Psi_{j,n,m}(x,y) = \Psi_{j,n}(x)\Psi_{j,m}(y)\}.$$

Для преобразованного указанным образом пространства на первом уровне декомпозиции, аппроксимирующие коэффициенты $\mathbf{A}_j = \{aa_{j,n,m}\}$ получают как коэффициенты, сформированные в результате разложения в базисе $\{ff_{j,n,m}(x,y)\}$. Горизонтальные детализирующие коэффициенты $\mathbf{H}_j = \{ad_{j,n,m}\}$ получают как коэффициенты, сформированные в результате разложения в базисе $\{f\Psi_{j,n,m}(x,y)\}$. Соответственно, вертикальные детализирующие коэффициенты $\mathbf{V}_j = \{da_{j,n,m}\}$ получают как коэффициенты, сформированные в результате разложения в базисе $\{\Psi f_{j,n,m}(x,y)\}$. А диагональные детализирующие коэффициенты $\mathbf{D}_j = \{dd_{j,n,m}\}$ получают как коэффициенты, сформированные в результате разложения в базисе $\{\Psi\Psi_{j,n,m}(x,y)\}$.

Соответственно, для второго уровня декомпозиции, в качестве исходных данных будет выступать матрица коэффициентов:

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow (\mathbf{A}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{V}_2, \mathbf{D}_2).$$

Таким образом, следуя указанной аналогии, можно получить следующий алгоритм декомпозиции матрицы исходного изображения \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{A}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{D}_1) \rightarrow (\mathbf{A}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{V}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{D}_1) \rightarrow \dots$$

Закономерность изменения размеров формируемых двумерных массивов коэффициентов разложения заключается в следующем: на каждом уровне декомпозиции размеры получаемых массивов новых коэффициентов будут уменьшаться ровно в два раза по сравнению с предыдущими массивами. При этом общая сумма размеров всех массивов коэффициентов всегда будет равна размеру исходной матрицы \mathbf{S} , что указывает на сохранение «объема» информации, и служит индикатором правильности выполнения преобразований.

В [3] указанная особенность была использована для разработки уникального алгоритма, позволившего повысить степень сжатия файлов графического изображения при заданной величине пикового отношения сигнал/шум ($PSNR$).

Такой алгоритм основан на возможности восстановления трех цветового кадра изображения $\hat{s}(l, h)$, l и h – вертикальная и горизонтальная координаты пикселя кадра, с компонентами R , G , B , с точностью до заданного значения $PSNR$:

$$PSNR = 10 \lg \left[\frac{(2^B - 1)^2 \times L \times H \times K}{\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{h=1}^H (s_k(l, h) - \hat{s}_k(l, h))^2} \right]. \quad (8)$$

В алгоритме (8) L – горизонтальный размер кадра в пикселях; H – вертикальный размер; $s_k(l, h)$ – l -тое, h -тое значение пикселя k -й компоненты исходного кадра графического изображения; $\hat{s}_k(l, h)$ – l -тое, h -тое значение пикселя k -й компоненты декомпрессированного после сжатия восстановленного кадра; B – количество битов, отводимых на точку (в зависимости от количества представляемых цветов, на каждую точку отводится от 1 до 48 битов); $K = 3$ – число компонентов R , G , B .

Сущность алгоритма (8) базируется на совокупности последовательно выполняемых процедур дискретного вейвлет-преобразования, формирования матрицы вейвлет-коэффициентов, сжатия матрицы, декомпрессии, восстановления исходного кадра графического изображения путем формирования нулевой матрицы с декомпрессированными вейвлет-коэффициентами и выполнения обратного дискретного вейвлет-преобразования.

В соответствии с алгоритмом (8), чем меньше различий в числовых значениях пикселей между исходным кадром $s(l, h)$ и восстановленным $\hat{s}(l, h)$, тем выше получаемое значение показателя $PSNR$. А чем выше получаемое значение показателя $PSNR$, тем меньше претерпевает изменений файл после процедур прямого и обратного преобразований.

Представленный алгоритм сжатия посредством вейвлет-преобразования не единственный в своем роде. В настоящее время разработано несколько подходов к сжатию изображений на основе кратномасштабного преобразования их элементов, в том числе, и на

основе дискретно-косинусного преобразования [10]. Но при этом во всех алгоритмах сжатия используются одни и те же, с точки зрения технологического предназначения, технические процедуры. Их взаимосвязь показана на рисунке 1.

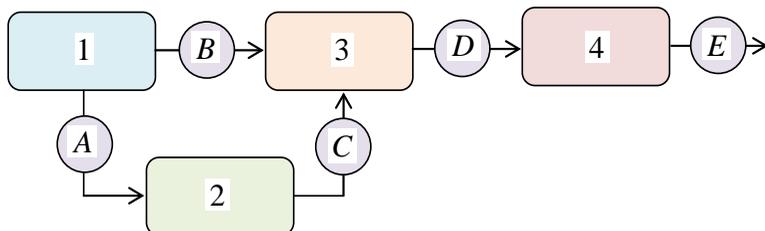


Рис. 1. Схема основных этапов преобразования изображения в алгоритмах сжатия на основе кратномасштабного преобразования

На рисунке 1 изображено:

1 – источник изображения (матрица дискретных данных);

2 – коэффициенты преобразования дискретных отсчетов изображения;

3 – массив двоичных видеоданных $\{ \mathbf{V}_1 \}$;

4 – массив двоичных видеоданных $\{ \mathbf{V}_2 \}$;

A – процедура преобразования дискретных отсчетов изображения;

B – процедура кодирования дискретных отсчетов изображения;

C – процедура кодирования коэффициентов преобразования;

D – процедура статического кодирования двоичных последовательностей;

E – цифровые коэффициенты сжатия.

Рассмотрим особенности основных процедур преобразования. Так, преобразование дискретных отсчетов изображения, блок A, позволяет минимизировать количество битов, используемых для кодирования результатов преобразования.

Операции кодирования преобразованных отсчетов изображения, блок B, и статистического кодирования результирующих двоичных последовательностей, блок D, обеспечивают приведение коэффициентов преобразования к двоичному виду, в интересах последующей их передачи по цифровым каналам связи.

Учитывая, что вся совокупность рассмотренных технологических операций характеризует сущность каждого из известных методов сжатия изображений, то уникальность и

возможности последних определяются не столько указанными операциями, сколько соответствием проводимых преобразований статистическим свойствам кодируемых изображений.

В качестве базовых методов сжатия изображений в настоящее время определены: адаптивное ортогональное преобразование, обеспечивающее наилучшее согласование со статистическими свойствами исходных дискретных данных; дискретно-косинусное преобразование и вейвлет-преобразование [8].

4. Обоснование вложенной структуры субматриц изображений, получаемых на основе вейвлет-коэффициентов. В рамках рассматриваемой области исследования, кратномасштабное вейвлет-преобразование исходного изображения, представленного матрицей яркостей пикселей $\mathbf{A}_{P \times N}$, где P – количество строк изображения; N – количество столбцов изображения, будет представлять собой многоуровневое иерархическое преобразование, в котором вейвлет-коэффициенты первого уровня разложения матрицы $\mathbf{A}_{P \times N}$ можно представить в матричной форме [3, 10]:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\frac{1P}{2} \times P} \\ \cdots \\ \mathbf{H}_{\frac{1P}{2} \times P} \end{bmatrix} \mathbf{A}_{P \times N} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1N \times N/2}^T & \vdots & \mathbf{H}_{1N \times N/2}^T \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{L}_{1(P/2) \times P}$, $\mathbf{H}_{1(P/2) \times P}$ – матрицы преобразования первого уровня разложения размером $(P/2) \times P$ элементов; $\mathbf{L}_{1N \times N/2}^T$, $\mathbf{H}_{1N \times N/2}^T$ – матрицы преобразования первого уровня разложения размером $N \times N/2$; T – здесь и далее знак транспонирования.

Матрицы $\mathbf{L}_{1(P/2) \times P}$, $\mathbf{H}_{1(P/2) \times P}$ имеют вид:

$$\mathbf{L}_{\frac{1P}{2} \times P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^\Gamma(1) \\ \mathbf{I}^\Gamma(2) \\ \vdots \\ \mathbf{I}^\Gamma(P/2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{\frac{1P}{2} \times P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(1) \\ \mathbf{h}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T(P/2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{1N \times N/2}^T = [\mathbf{l}(1) \ \mathbf{l}(2) \ \dots \ \mathbf{l}(N/2)],$$

$$\mathbf{H}_{1N \times N/2}^T = \mathbf{h}[\mathbf{l}(1) \ \mathbf{h}(2) \ \dots \ \mathbf{h}(N/2)],$$

где $\mathbf{l}^T(p)$, $\mathbf{h}^T(p)$ – векторы-строки, $p = 1, 2, \dots, P/2$, состоящие из низкочастотных и высокочастотных коэффициентов, дополненных нулевыми коэффициентами, соответственно; $\mathbf{l}^T(n)$, $\mathbf{h}^T(n)$ – векторы-строки, $n = 1, 2, \dots, N/2$, состоящие из низкочастотных и высокочастотных коэффициентов, дополненных нулевыми коэффициентами, соответственно.

Более наглядно, структура матриц $\mathbf{L}_{1(P/2) \times P}$, $\mathbf{H}_{1(P/2) \times P}$ представлена выражениями (9) и (10), соответственно:

$$\mathbf{L}_{\frac{1P}{2} \times P} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & l_2 & \dots & l_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ l_{n-1} & l_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_1 & l_2 & \dots & l_{n-2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_{\frac{1P}{2} \times P} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & \dots & h_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Следует отметить, что структура матриц $\mathbf{L}_{1N \times N/2}^T$ и $\mathbf{H}_{1N \times N/2}^T$ является очевидной, поскольку они представляют собой результат транспонирования матриц, представленных выражениями (9) и (10), соответственно.

Таким образом, используя далее метод блочного умножения матриц [21], можно получить матрицу вейвлет-коэффициентов кратномасштабного преобразования первого уровня разложения, которую представим в виде четырех субматриц:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T & \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{H}_1^T \\ \mathbf{H}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T & \mathbf{H}_1 \mathbf{A} \mathbf{H}_1^T \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Так, на рисунке 2 показан пример визуализации матрицы \mathbf{B}_1 , представляющий собой типовое изображение, рекомендованное для тестирования алгоритмов сжатия [22].

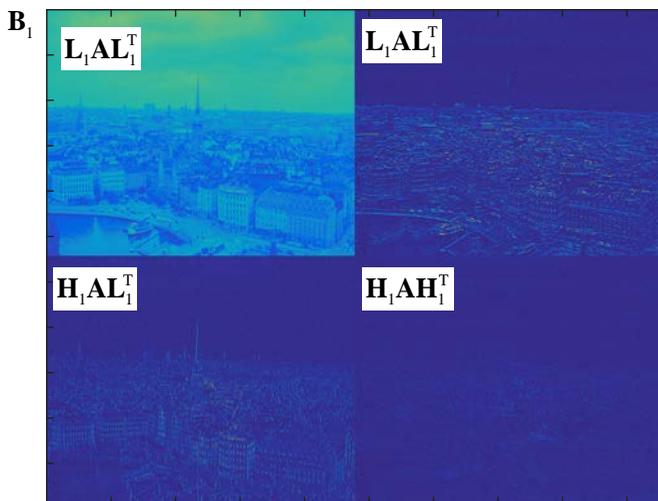


Рис. 2. Представление вейвлет-коэффициентов кратномасштабного разложения изображения на первом уровне

Матрица вейвлет-коэффициентов \mathbf{B}_1 , представленная на рисунке 2, получена в соответствии с выражением (11).

Следует отметить, что на полученном изображении четко прослеживается 4 явно выраженных блока вейвлет-коэффициентов:

- левый верхний блок, образованный элементами субматрицы $\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T$;
- правый верхний блок, образованный элементами субматрицы $\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{H}_1^T$;
- левый нижний блок, образованный элементами субматрицы $\mathbf{H}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T$;
- правый нижний блок, образованный элементами субматрицы $\mathbf{H}_1 \mathbf{A} \mathbf{H}_1^T$.

Отметим, что используемые в преобразовании (2) матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1P/2 \times P} \\ \dots \\ \mathbf{H}_{1P/2 \times P} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1N \times N/2}^T : \mathbf{H}_{1N \times N/2}^T \end{bmatrix} \text{ являются ортонормальными [21],}$$

т.е. для этих матриц справедливы следующие равенства:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1P/2 \times P}^T \\ \dots \\ \mathbf{H}_{1P/2 \times P}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1P/2 \times P} \\ \dots \\ \mathbf{H}_{1P/2 \times P} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{P \times P}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1N \times N/2}^T : \mathbf{H}_{1N \times N/2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1N/2 \times N} \\ \dots \\ \mathbf{H}_{1N/2 \times N} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{N \times N}, \quad (13)$$

где $\mathbf{E}_{P \times P}$ и $\mathbf{E}_{N \times N}$ – диагональные матрицы с единицами в главной диагонали размером $P \times P$ и $N \times N$ элементов, соответственно.

Отметим, что справедливость свойства ортонормальности сохраняется не только для матриц первого уровня преобразования, но и всех последующих уровней кратномасштабной декомпозиции.

Далее, используя правила блочного умножения матриц, выражения (12) и (13) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{L}_{1P/2 \times P}^T \mathbf{L}_{1(P/2) \times P} + \mathbf{H}_{1P/2 \times P}^T \mathbf{H}_{1(P/2) \times P} = 0,5\mathbf{E}_{P \times P} + 0,5\mathbf{E}_{P \times P} = \mathbf{E}_{P \times P}, \quad (14)$$

$$\mathbf{L}_{1N \times N/2}^T \mathbf{L}_{1(N/2) \times N} + \mathbf{H}_{1N \times N/2}^T \mathbf{H}_{1(N/2) \times N} = 0,5\mathbf{E}_{N \times N} + 0,5\mathbf{E}_{N \times N} = \mathbf{E}_{N \times N}. \quad (15)$$

Так, матричная форма коэффициентов второго уровня разложения будет иметь вид:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{2 \frac{P}{4} \times \frac{P}{2}} \\ \cdots \\ \mathbf{H}_{2 \frac{P}{4} \times \frac{P}{2}} \end{bmatrix} \mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2) \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1(N/2) \times N/4}^T \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{1(N/2) \times N/4}^T \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2)$ – левый верхний квадрант матрицы \mathbf{B}_1 размером $P/2 \times N/2$ элементов; $\mathbf{L}_{2(P/4) \times (P/2)}$, $\mathbf{H}_{2(P/4) \times (P/2)}$, $\mathbf{L}_{1(N/2) \times (N/4)}$, $\mathbf{H}_{1(N/2) \times (N/4)}$, – матрицы, по своей структуре, аналогичные матрицам $\mathbf{L}_{1(P/2) \times P}$, $\mathbf{H}_{1(P/2) \times P}$, и $\mathbf{L}_{1N \times (N/2)}^T$, $\mathbf{H}_{1N \times (N/2)}^T$, соответственно.

Следует обратить внимание на то, что размер субматриц второго уровня кратномасштабного преобразования в два раза меньше. Это объясняется уменьшением в два раза числа строк и столбцов.

По аналогии с выражением (11) коэффициенты второго уровня разложения можно также представить в блочном виде:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2) \mathbf{L}_2^T & \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2) \mathbf{H}_2^T \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2) \mathbf{L}_2^T & \mathbf{H}_2 \mathbf{B}_1(1:P/2, 1:N/2) \mathbf{H}_2^T \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Отметим, что если, в матрице \mathbf{B}_1 левый верхний блок, образованный элементами матрицы $\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T$, заменить матрицей \mathbf{B}_2 , то в результате получим матрицу коэффициентов первого и второго уровней разложения исходного изображения, которая будет характеризоваться наличием субматриц первого и второго уровней разложения.

В общем случае, исходную матрицу \mathbf{B}_1 можно рассматривать как ядро для вейвлет-коэффициентов второго уровня кратномасштабного преобразования анализируемого изображения.

Пример визуального представления элементов матрицы вейвлет-коэффициентов второго уровня разложения \mathbf{B}_2 демонстрируется на рисунке 3.

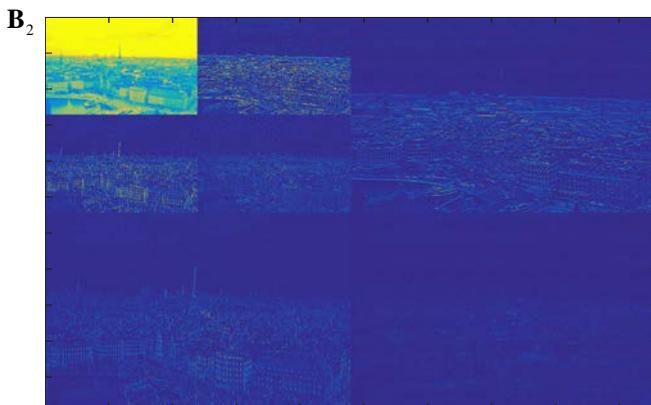


Рис. 3. Представление вейвлет-коэффициентов первого и второго уровней кратномасштабного разложения

С учетом выражений (9 – 17) вейвлет коэффициенты матрицы $\mathbf{A}_{P \times N}$ J -го уровня разложения в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{J \frac{P}{2^J} \times \frac{P}{2^{J-1}}} \\ \dots \\ \mathbf{H}_{J \frac{P}{2^J} \times \frac{P}{2^{J-1}}} \end{bmatrix} \mathbf{B}_{J-1}(1:P/2^{J-1}, 1:N/2^{J-1}) \times \times \left[\mathbf{L}_{J(N/2^{J-1}) \times N/2^J}^T \vdots \mathbf{H}_{J(N/2^{J-1}) \times N/2^J}^T \right] \quad (18)$$

Таким образом, выражение (18) можно рассматривать как обобщенную аналитическую форму алгоритма кратномасштабной декомпозиции изображений.

В качестве иллюстрации на рисунке 4 показаны вейвлет-коэффициенты на шести уровнях кратномасштабного преобразования тестируемого изображения.



Рис. 4. Представление вейвлет-коэффициентов с первого по шестой уровни кратномасштабного разложения

На основе приведенных математический рассуждений можно сделать вывод о том, что коэффициенты вейвлет-преобразования имеют структуру вложенных субматриц. При этом каждый уровень разложения характеризуется своими субматрицами. В связи с этим корреляционный анализ целесообразно проводить отдельно для элементов субматриц соответствующих уровней разложения. Кроме того, поскольку ядром i -го уровня является матрица коэффициентов предшествующего, $i - 1$ -го, уровня, то можно сделать обоснованное предположение о зависимости соответствующих элементов соседних уровней. Поэтому далее проанализируем также зависимости между соответствующими коэффициентами различных уровней преобразования.

5. Анализ корреляционных зависимостей вейвлет-коэффициентов различных уровней кратномасштабного преобразования. В интересах исследования корреляционных зависимостей между вейвлет-коэффициентами, получаемых на различных уровнях кратномасштабного преобразования, определим прямоугольную область размером $p \times n$ элементов.

Затем последовательно будем смещать исследуемую область внутри анализируемой субматрицы от крайнего верхнего положения до крайнего нижнего. Общая последовательность указанных процедур представлена на рисунке 5.

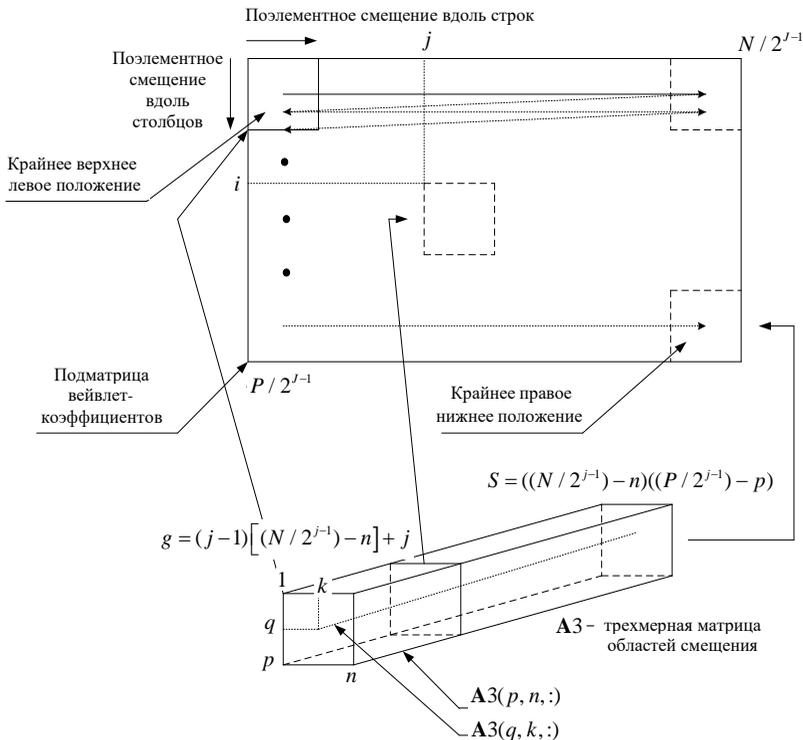


Рис. 5. Последовательность и направление процедур смещения исследуемой области вейвлет-коэффициентов внутри анализируемой субматрицы

Поскольку субматрица вейвлет-коэффициентов J -го уровня кратномасштабного разложения имеет $P/2^{j-1}$ строк и $N/2^{j-1}$ столбцов, то тогда общее количество поэлементных смещений в исследуемой области размером $p \times n$ элементов, непосредственно внутри субматрицы размером $P/2^{j-1} \times N/2^{j-1}$, составит:

$$S = \left(\frac{P}{2^{j-1}} - p \right) \left(\frac{N}{2^{j-1}} - n \right). \quad (19)$$

С учетом полученных результатов, каждую матрицу смещения предлагается рассматривать как соответствующий слой трехмерной матрицы $A3_{p \times n \times S}$. Принцип ее формирования представлен на рисунке 5.

Так, например, первый слой трехмерной матрицы образован из матрицы смещения, занимающей крайнее левое верхнее положение. В свою очередь, последний, S -ый слой матрицы $\mathbf{A3}_{p \times n \times S}$ образован из матрицы смещения, занимающей крайнее правое нижнее положение.

Таким образом, матрица смещения, левый верхний элемент которой, соответствует элементу субматрицы вейвлет-коэффициентов кратномасштабного преобразования с индексами i, j , образует q -ый слой трехмерной матрицы $\mathbf{A3}_{p \times n \times S}$. Причем процедуру формирования q -ного слоя трехмерной матрицы $\mathbf{A3}_{p \times n \times S}$ можно формализовать следующим образом:

$$q = (i-1) \left(\frac{N}{2^{j-1}} - n \right) + j. \quad (20)$$

В интересах оценки наличия взаимосвязей между элементами матриц смещений, имеющих одинаковую индексацию, будем исходить из того, что данные элементы, в свою очередь, образуют соответствующие вектора трехмерной матрицы $\mathbf{A3}_{p \times n \times S}$.

Например, элементы матриц смещений с индексами (q, k) образуют трехмерный вектор $\mathbf{A3}(q, k, :)$, как это показано на рисунке 4.

С целью выявления наличия взаимосвязей между элементами матриц смещения вычислим корреляцию между векторами $\mathbf{A3}(q, k, :)$, $q = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$ и вектором $\mathbf{A3}(p, n, :)$. Для этого воспользуемся выражением выборочного парного коэффициента корреляции К. Пирсона [23]:

$$r_{q,k} = \frac{\sum_i^S \left(\mathbf{A3}(q, k, i) - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{A3}(q, k, i) \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^S \left(\mathbf{A3}(q, k, i) - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{A3}(q, k, i) \right)^2}} \times \frac{\left(\mathbf{A3}(p, n, i) - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{A3}(p, n, i) \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^S \left(\mathbf{A3}(p, n, i) - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{A3}(p, n, i) \right)^2}} \quad (21)$$

В выражении (21) где $q = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Отметим, что величины, рассчитанные в соответствии с выражением (21), образуют матрицу парных корреляций между

элементами с индексами (q, k) и элементами с индексами (p, n) . При этом величины $r_{q,k}$, где $q = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$ изменяются в пределах:

$$-1 \leq r_{q,k} \leq 1. \quad (22)$$

Физический смысл коэффициентов $r_{q,k}$, удовлетворяющий условию (22) состоит в том, что если значение $r_{q,k}$ по величине близко к 1, т.е. $r_{q,k} \approx 1$, то между элементами множеств: $\mathbf{A3}(q, k, i)$ и $\mathbf{A3}(p, n, i)$, $i = 1, 2, \dots, S$ однозначно существует зависимость вида:

$$\mathbf{A3}(q, k, i) \approx a\mathbf{A3}(p, n, i) + b, \quad (23)$$

где a, b – вещественные числа, причем $a > 0$.

А если выполняется приближенное равенство (22), то тогда между элементами множеств $\mathbf{A3}(q, k, i)$ и $\mathbf{A3}(p, n, i)$, $i = 1, 2, \dots, S$ существует линейная зависимость. Причем возрастание элементов множества $\mathbf{A3}(q, k, i)$ приводит к возрастанию соответствующих элементов множества $\mathbf{A3}(p, n, i)$.

В свою очередь, если величина $r_{q,k}$ по своему значению близка к -1 , т.е. $r_{q,k} \approx -1$, то тогда можно утверждать, что между элементами множеств $\mathbf{A3}(q, k, i)$ и $\mathbf{A3}(p, n, i)$, $i = 1, 2, \dots, S$ существует зависимость в виде (23), но при этом $a < 0$. Это означает, что возрастание элементов множества $\mathbf{A3}(q, k, i)$ приводит к уменьшению соответствующих элементов множества $\mathbf{A3}(p, n, i)$. Промежуточные значения $r_{q,k}$, близкие к 0, указывают на слабую корреляцию между элементами и, соответственно, низкую зависимость.

6. Результаты практического эксперимента. На рисунках 6, 7 и 8 показаны результаты анализа зависимостей между вейвлет-коэффициентами кратномасштабного преобразования для $J = 1$ для $\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$, $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1^T$ и $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$, полученных в ходе практического эксперимента. Так на рисунках 6а, 7а, 8а показаны коэффициенты корреляции, вычисленные в соответствии с выражением (21) для субматриц первого уровня разложения.

В качестве локальной области смещения использовалась область размером 8×8 элементов. Расчеты проведены для исходного тестового изображения, представленного на рисунке 2.

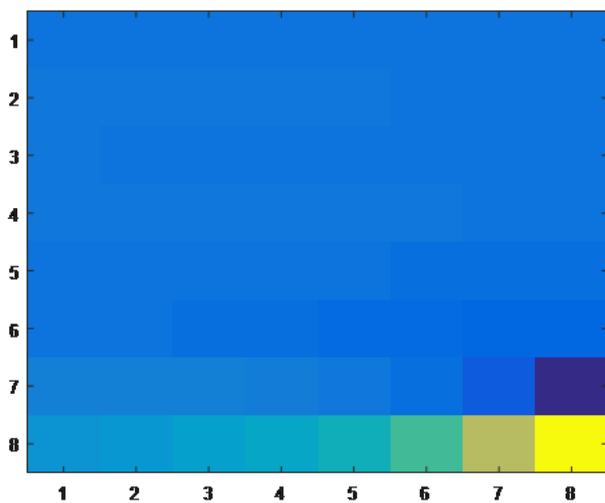


Рис. 6(а)

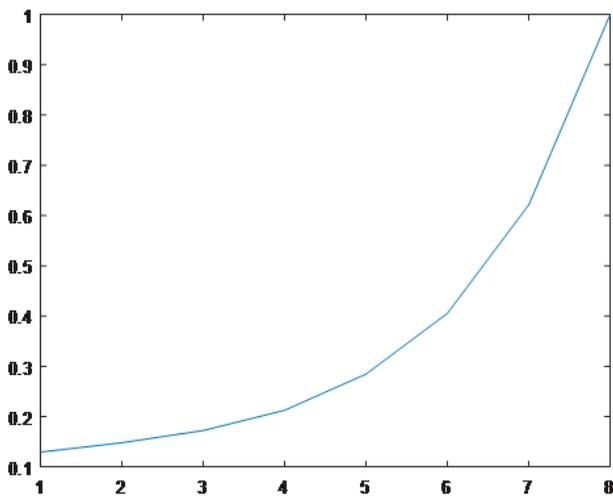


Рис. 6(б)

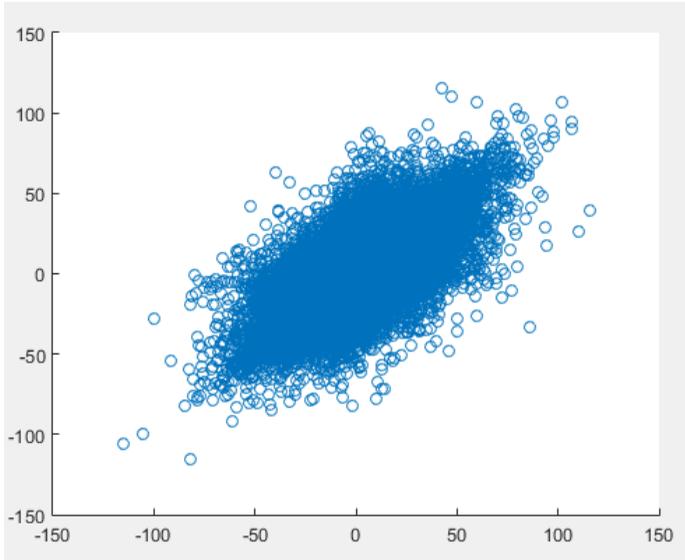


Рис. 6(в)

Рис. 6. Результаты анализа зависимостей между вейвлет-коэффициентами кратномасштабного преобразования $L_1 \mathbf{A} \mathbf{H}^T_1$ для $J = 1$

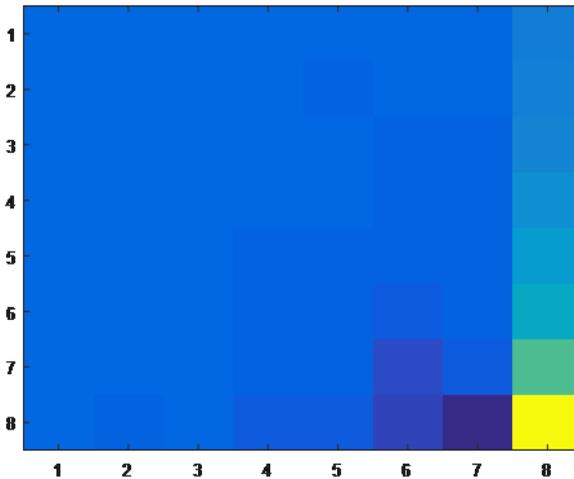


Рис. 7(а)

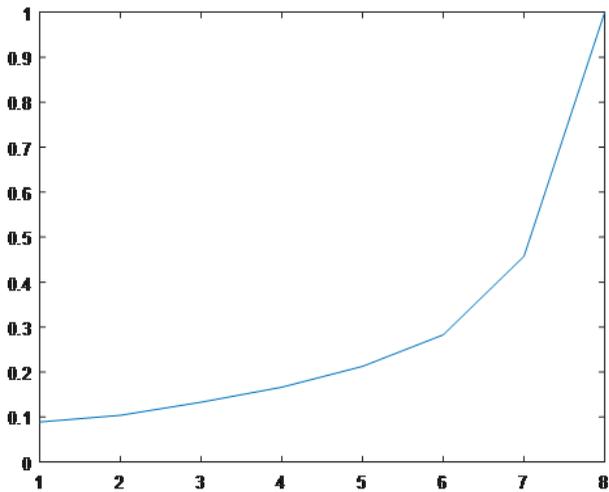


Рис. 7(б)

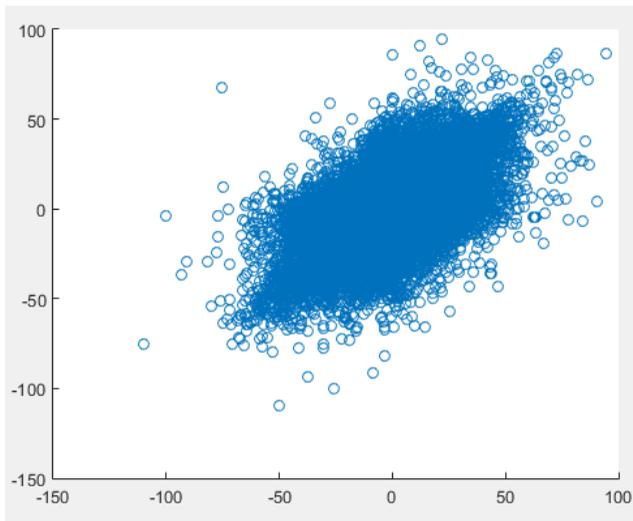


Рис. 7(в)

Рис. 7. Результаты анализа зависимостей между вейвлет-коэффициентами кратномасштабного преобразования $\mathbf{H}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T$ для $J = 1$

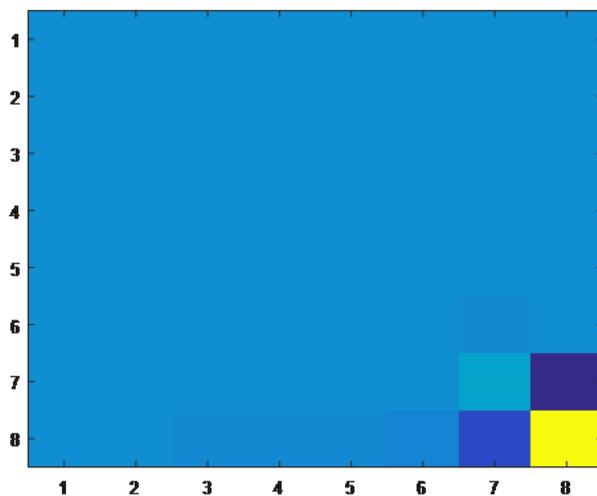


Рис. 8(а)

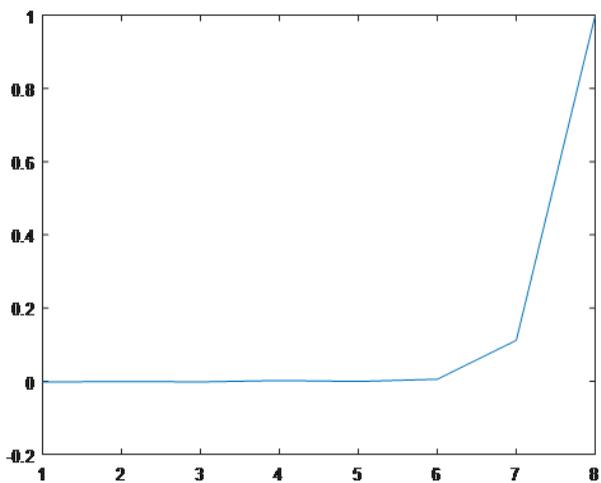


Рис. 8(б)

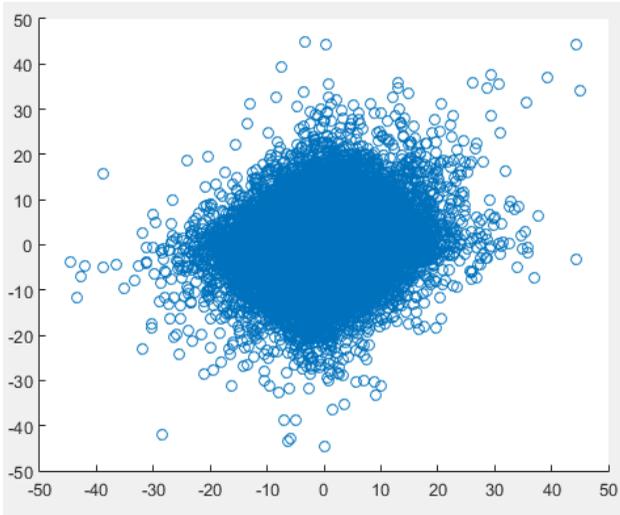


Рис. 8(в)

Рис. 8. Результаты анализа зависимостей между вейвлет-коэффициентами кратномасштабного преобразования $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{H}^T_1$ для $J = 1$

Для лучшей наглядности сущности полученных результатов на рисунках 6(а), 7(а) и 8(а), на рисунке 9 представлена цветовая шкала, с помощью которой можно оценить степень корреляции. Дополнительно, над цветовой шкалой представлены и количественные значения.

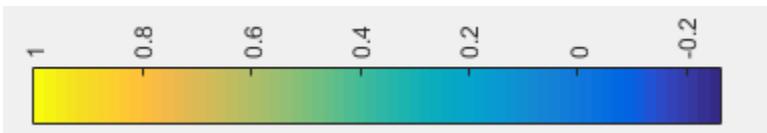


Рис. 9. Цветовая шкала соответствия значений коэффициентов корреляции в матрицах разложения

На рисунках 6(б), 7(б) и 8(б) изображены графики зависимости коэффициентов корреляции: в восьмой строке для субматрицы $\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{H}^T_1$; в восьмом столбце для субматрицы $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{L}^T_1$; для диагональных элементов субматрицы $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{H}^T_1$.

Наконец, на рисунках 6(в), 7(в) и 8(в) показаны графики рассеяния для вейвлет-коэффициентов с максимальной корреляцией.

Анализируя данные, полученные в ходе экспериментального исследования, было определено, что между вейвлет-коэффициентами внутри локальной области размером 8×8 существует однозначная линейная зависимость.

При этом установлено следующее:

- для субматрицы $\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$ характерно наличие максимальной корреляции между соседними элементами, находящимися в строке;
- для субматрицы $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1^T$ характерно наличие максимальной корреляции между соседними элементами, находящимися в столбце;
- для субматрицы $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$ характерно наличие максимальной корреляции между соседними диагональными элементами.
- корреляция между элементами субматрицы $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$ существенно ниже, чем между элементами субматриц $\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{H}_1^T$ и $\mathbf{H}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1^T$, о чем свидетельствуют, как низкое значение максимального коэффициента корреляции (0,1 по сравнению с 0,6 и 0,5), так и более равномерный характер рассеяния.

Полученные закономерности сохраняются и для субматриц остальных уровней разложения. Для устойчивого подтверждения данного факта, описанные вычисления проводились на выборке из более двухсот типовых изображений.

Следует отметить, что на практике большой интерес представляет подход, основанный на реализации алгоритма (8). Это обусловлено рядом причин. Прежде всего – возможностью работы с различными форматами представления данных изображения. Если для исходного состояния изображения использовать графический файл формата *BMP* (от англ. *Bitmap Picture* – формат хранения растровых изображений, разработанный компанией *Microsoft*), то после сжатия, алгоритм позволяет перейти к более компактному формату сжатия – *JPEG* (от англ. *Joint Photographic Experts Group*, по названию организации-разработчика). Так, для первой итерации выбирают значение переменной $iter = 0$. Затем над исходным изображением

$A(l, h)$, имеющим размер $\frac{L}{2^{iter}} \times \frac{H}{2^{iter}}$ (первая итерация $iter = 0$: $L \times H$) элементов производят вычисление матрицы вейвлет-преобразования размером $\frac{L}{2^{iter}} \times \frac{H}{2^{iter}}$. И уже из этой матрицы формируют матрицу вейвлет-коэффициентов $Y(l, h)$, где $l = 1, \dots, \frac{L}{2^{iter+1}}$ и $h = 1, \dots, \frac{H}{2^{iter+1}}$ (для $iter = 0$: $Y_1(l, h)$, размером $(L/2) \times (H/2)$). Следует отметить, что

значения вейвлет-коэффициентов в матрице на позициях $l = 1, \dots, \frac{L}{2^{iter+1}}$ и $h = 1, \dots, \frac{H}{2^{iter+1}}$ по своей величине равны нулю, или очень близки к этому значению, т.е. обладают очень низкой энергией.

Далее, полученные вейвлет-коэффициенты $Y(l, h)$ сжимают алгоритмом *JPEG*, после чего декомпрессируют и формируют нулевую матрицу $O(l, h)$ размером $\frac{L}{2^{iter}} \times \frac{H}{2^{iter}}$ элементов и вместо элементов с индексами $l = 1, \dots, \frac{L}{2^{iter+1}}$ и $h = 1, \dots, \frac{H}{2^{iter+1}}$ помещают соответствующие элементы декомпрессированной матрицы $\hat{Y}(l, h)$.

В результате, сформированная нулевая матрица $O_1(l, h)$ представляет собой матрицу размером $L \times H$, значения элементов которой равны нулю.

После этого, элементы, находящиеся на позициях $l = 1, \dots, \frac{L}{2^{iter+1}}$ и $h = 1, \dots, \frac{H}{2^{iter+1}}$, заменяют вейвлет-коэффициентами декомпрессированной матрицы $\hat{Y}_1(l, h)$.

На следующем этапе формируют восстановленное изображение $\hat{A}(l, h)$ посредством реализации процедур обратного вейвлет-преобразования над нулевой матрицей $O_1(l, h)$ размером $\frac{L}{2^{iter}} \times \frac{H}{2^{iter}}$, в позициях индексов $l = 1, \dots, \frac{L}{2^{iter+1}}$ и $h = 1, \dots, \frac{H}{2^{iter+1}}$ которой размещены вейвлет-коэффициенты декомпрессированной матрицы $\hat{Y}_1(l, h)$.

И на последнем этапе определяют величину *PSNR*, характеризующую качество восстановленного изображения $\hat{Y}_1(l, h)$ по отношению к исходному $A(l, h)$, и сравнивают ее заданной величиной *PSNR*_{доп.} А величину *PSNR*_{iter} (для $iter = 0$: *PSNR*₀) оценивают по формуле (8), сравнивая ее с предварительно заданной величиной *PSNR*_{доп.} Выполнение условия $PSNR_0 > PSNR_{доп}$ указывает на то, что значение переменной *iter* следует увеличить на единицу и повторить рассмотренные выше процедуры, при этом помещая каждый раз вместо $A(l, h)$ значения вейвлет-коэффициентов $Y(l, h)$,

сформированных на предыдущем этапе выполнения итераций. Указанные процедуры следует выполнять до тех пор, пока не будет достигнуто требование $PSNR_{iter} \leq PSNR_{доп}$, указывающее на то, что сжатый файл изображения может быть использован для хранения.

7. Заключение. Представленные результаты теоретических исследований и данные проведенного практического эксперимента позволяют утверждать, что между низкочастотными коэффициентами кратномасштабного вейвлет-преобразования верхнего уровня разложения сохраняются примерно одинаковые зависимости равномерно по всем направлениям.

Таким образом, можно полагать о правомерности сделанных заключений о наличии характерных зависимостей между коэффициентами кратномасштабного вейвлет-преобразования различных уровней разложения матриц изображений.

Следовательно, учет указанных зависимостей между коэффициентами в процессе их кодирования позволит получить большие значения коэффициентов сжатия.

Авторы полагают, что совместная реализация полученных результатов с алгоритмом сжатия, основанном на учете заданной величины пикового отношения сигнал/шум, определяемого последовательностью выполняемых процедур кратномасштабного вейвлет-преобразования, формирования матрицы вейвлет-коэффициентов, ее сжатия, декомпрессии и восстановления исходного графического изображения путем формирования нулевой матрицы с декомпрессированными вейвлет-коэффициентами, и выполнением обратного дискретного вейвлет-преобразования, позволит существенно расширить арсенал средств в практике сжатия изображений.

Математическая модель адаптивного арифметического кодирования, учитывающая корреляционные свойства коэффициентов кратномасштабного вейвлет-преобразования, будет подробно рассмотрена в следующей статье по данной тематике.

Литература

1. Shevchuk B., Brayko Y., Geraimchuk M., Ivakhiv O. Highly information and energy-efficient monitoring data transmission in iot networks. *Journal of Mobile Multimedia*. 2021. Т. 17. № 4. С. 465-498.
2. Mizdos T., Uhrina M., Pocta P., Barkowsky M. How to reuse existing annotated image quality datasets to enlarge available training data with new distortion types. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. Т. 80. № 18. С. 28137-28159.
3. Умбиталиев А.А., Дворников С.В., Оков И.Н., Устинов А.А. Способ сжатия графических файлов методами вейвлет-преобразований // *Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения*. 2015. № 3. С. 100-106.

4. Дворников С.В., Устинов А.А., Оков И.Н., Царелунго А.Б., Дворовой М.О., Цветков В.В. Способ сжатия графических файлов // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2017. № 4. С. 77-86.
5. Kamatar V.S., Baligar V.P., Savanur S.S. Wo phase image compression algorithm using diagonal pixels of image blocks. В сборнике: 2021 2nd International Conference for Emerging Technology, INCET 2021. 2. 2021. С. 9456290.
6. Tellez D., Litjens G., Van Der Laak J., Ciompi F. Neural image compression for gigapixel histopathology image analysis. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2021. Т. 43. № 2. С. 567-578.
7. Sokolova E.A., Nyrkov A.P., Ivanovskii A.N. 3D image compression with variable fragments. В сборнике: Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2021. 2021. С. 699-702.
8. Дворников С.В., Устинов А.А., Цветков В.В. Компенсация движения в видеокодеках, использующих трёхмерные ортогональные преобразования, на основе оптимальных разбиений кодируемых блоков во временной области // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2013. № 2. С. 98-111.
9. Messaoudi A., Benchabane F., Srairi K. DCT-based color image compression algorithm using adaptive block scanning. Signal, Image and Video Processing. 2019. Т. 13. № 7. С. 1441-1449.
10. Mander K., Jindal H. An improved image compression-decompression technique using block truncation and wavelets. International Journal of Image, Graphics and Signal Processing. 2017. Т. 9. № 8. С. 17-29.
11. Kumar G., Brar Er.S.S., Kumar R., Kumar A. Review: dwt-dct technique and arithmetic-huffman coding based image compression. International Journal of Engineering and Manufacturing. 2015. Т. 5. № 3. С. 20-33.
12. Pertsau D.Yu., Doukkin A.A. Context modeling in problems of compressing hyperspectral remote sensing data Pattern Recognition and Image Analysis. 2020. Т. 30. № 2. С. 217-223.
13. Hua S., Zhao W., Liu J. Background suppression algorithms based on improved filter and image multi-scale transformation. Xi Tong Gong Cheng Yu Dian Zi Ji Shu. 2020. Т. 42. № 8. С. 1679-1684.
14. Li G., Lin Y., Qu X. An infrared and visible image fusion method based on multi-scale transformation and norm optimization. Information Fusion. 2021. Т. 71. С. 109-129.
15. Zhou J., Yao J., Zhang W., Zhang D. Multi-scale retinex-based adaptive gray-scale transformation method for underwater image enhancement. Multimedia Tools and Applications. 2021.
16. Yu J., Zhang B., Chen W., Liu H. Multi-scale analysis on the tensile properties of UHPC considering fiber orientation. Composite Structures. 2022. Т. 280. С. 114835.
17. Дворников С.В., Дворников С.С., Спиринов А.М. Синтез манипулированных сигналов на основе вейвлет-функций // Информационные технологии. 2013. № 12. С. 52-55.
18. S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1999. EDN: YGCTMD.
19. Vozhokin S., Suslova I., Tarakanov D. Special techniques in applying continuous wavelet transform to non-stationary signals of heart rate variability. Communications in Computer and Information Science (см. в книгах). 2020. Т. 1211 CCIS. С. 291-310.
20. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 166 – № 11 – С. 1145–1170

21. Yu Q., Avestimehr A.S. Coded computing for resilient, secure, and privacy-preserving distributed matrix multiplication. *IEEE Transactions on Communications*. 2021. Т. 69. № 1. С. 59-72.
22. Ahmed I.T., Hammad B.T., Der C.S., Jamil N. Contrast-distorted image quality assessment based on curvelet domain features. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2021. Т. 11. № 3. С. 2595-2603.
23. Saccenti, E., Hendriks, M.H.W.B. & Smilde, A.K. Corruption of the Pearson correlation coefficient by measurement error and its estimation, bias, and correction under different error models. *Sci Rep* 10, 438 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-019-57247-4>.

Дворников Сергей Викторович — д-р техн. наук, профессор, кафедра радиотехнических и оптоэлектронных комплексов, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»; научный сотрудник, Военная академия связи им. С.М. Буденного. Область научных интересов: построение помехозащищенных систем радиосвязи, способов формирования и обработки сигналов сложных структур. Число научных публикаций — 283. practicdsv@yandex.ru; Тихорецкий проспект, 3, 194064, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)247-9811.

Дворников Сергей Сергеевич — канд. техн. наук, старший преподаватель, кафедра конструирования и технологий электронных и лазерных средств, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»; научный сотрудник, научно-исследовательский отдел, Военная академия связи им. С.М. Буденного. Область научных интересов: теория передачи сигналов, спектральная эффективность сигналов, помехозащищенность каналов управления и связи радиотехнических систем. Число научных публикаций — 114. dvornik.92@mail.ru; Тихорецкий проспект, 3, 194064, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)247-9820.

Устинов Андрей Александрович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, ФГУП «ГосНИИПП». Область научных интересов: теория связи, помехозащищенность инфокоммуникационных каналов радиотехнических систем, сжатие видео и речевой информации. Число научных публикаций — 150. ust_m_a@mail.ru; набережная Обводного канала, 29, 191167, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)274-3156.

S. DVORNIKOV, S. DVORNIKOV, A. USTINOV
**ANALYSIS OF THE CORRELATION PROPERTIES OF THE
WAVELET TRANSFORM COEFFICIENTS OF TYPICAL IMAGES**

Dvornikov S., Dvornikov S., Ustinov A. Analysis of the Correlation Properties of the Wavelet Transform Coefficients of Typical Images.

Abstract. The increasing flow of photo and video information transmitted through the channels of infocommunication systems and complexes stimulates the search for effective compression algorithms that can significantly reduce the volume of transmitted traffic, while maintaining its quality. In the general case, the compression algorithms are based on the operations of converting the correlated brightness values of the pixels of the image matrix into their uncorrelated parameters, followed by encoding the obtained conversion coefficients. Since the main known decorrelating transformations are quasi-optimal, the task of finding transformations that take into account changes in the statistical characteristics of compressed video data is still relevant. These circumstances determined the direction of the study, related to the analysis of the decorrelating properties of the generated wavelet coefficients obtained as a result of multi-scale image transformation. The main result of the study was to establish the fact that the wavelet coefficients of the multi-scale transformation have the structure of nested matrices defined as submatrices. Therefore, it is advisable to carry out the correlation analysis of the wavelet transformation coefficients separately for the elements of each submatrix at each level of decomposition (decomposition). The main theoretical result is the proof that the core of each subsequent level of the multi-scale transformation is a matrix consisting of the wavelet coefficients of the previous level of decomposition. It is this fact that makes it possible to draw a conclusion about the dependence of the corresponding elements of neighboring levels. In addition, it has been found that there is a linear relationship between the wavelet coefficients within the local area of the image with a size of 8×8 pixels. In this case, the maximum correlation of submatrix elements is directly determined by the form of their representation, and is observed between neighboring elements located, respectively, in a row, column or diagonally, which is confirmed by the nature of the scattering. The obtained results were confirmed by the analysis of samples from more than two hundred typical images. At the same time, it is substantiated that between the low-frequency wavelet coefficients of the multi-scale transformation of the upper level of the expansion, approximately the same dependences are preserved uniformly in all directions. The practical significance of the study is determined by the fact that all the results obtained in the course of its implementation confirm the presence of characteristic dependencies between the wavelet transform coefficients at different levels of image decomposition. This fact indicates the possibility of achieving higher compression ratios of video data in the course of their encoding. The authors associate further research with the development of a mathematical model for adaptive arithmetic coding of video data and images, which takes into account the correlation properties of wavelet coefficients of a multi-scale transformation.

Keywords: image compression, wavelet multiscale transform coefficients, correlated value transformation, decorrelation transformations.

References

1. Shevchuk B., Brayko Y., Geraimchuk M., Ivakhiv O. Highly information and energy-efficient monitoring data transmission in iot networks. *Journal of Mobile Multimedia*. 2021. T. 17. № 4. C. 465-498.

2. Mizdos T., Uhrina M., Pocta P., Barkowsky M. How to reuse existing annotated image quality datasets to enlarge available training data with new distortion types. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. Т. 80. № 18. С. 28137-28159.
3. Умбиталиев А.А., Дворников С.В., Оков И.Н., Устинов А.А. Способ сжатия графических файлов методами вейвлет-преобразований // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2015. № 3. С. 100-106.
4. Дворников С.В., Устинов А.А., Оков И.Н., Царелунго А.Б., Дворовой М.О., Цветков В.В. Способ сжатия графических файлов // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2017. № 4. С. 77-86.
5. Kamatar V.S., Baligar V.P., Savanur S.S. Wo phase image compression algorithm using diagonal pixels of image blocks. В сборнике: 2021 2nd International Conference for Emerging Technology, INCET 2021. 2. 2021. С. 9456290.
6. Tellez D., Litjens G., Van Der Laak J., Ciompi F. Neural image compression for gigapixel histopathology image analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2021. Т. 43. № 2. С. 567-578.
7. Sokolova E.A., Nyrkov A.P., Ivanovskii A.N. 3D image compression with variable fragments. В сборнике: Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2021. 2021. С. 699-702.
8. Дворников С.В., Устинов А.А., Цветков В.В. Компенсация движения в видеокодеках, использующих трёхмерные ортогональные преобразования, на основе оптимальных разбиений кодируемых блоков во временной области // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2013. № 2. С. 98-111.
9. Messaoudi A., Benchabane F., Srairi K. DCT-based color image compression algorithm using adaptive block scanning. *Signal, Image and Video Processing*. 2019. Т. 13. № 7. С. 1441-1449.
10. Mander K., Jindal H. An improved image compression-decompression technique using block truncation and wavelets. *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing*. 2017. Т. 9. № 8. С. 17-29.
11. Kumar G., Brar Er.S.S., Kumar R., Kumar A. Review: dwt-dct technique and arithmetic-huffman coding based image compression. *International Journal of Engineering and Manufacturing*. 2015. Т. 5. № 3. С. 20-33.
12. Pertsau D.Yu., Doudkin A.A. Context modeling in problems of compressing hyperspectral remote sensing data *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2020. Т. 30. № 2. С. 217-223.
13. Hua S., Zhao W., Liu J. Background suppression algorithms based on improved filter and image multi-scale transformation. *Xi Tong Gong Cheng Yu Dian Zi Ji Shu*. 2020. Т. 42. № 8. С. 1679-1684.
14. Li G., Lin Y., Qu X. An infrared and visible image fusion method based on multi-scale transformation and norm optimization. *Information Fusion*. 2021. Т. 71. С. 109-129.
15. Zhou J., Yao J., Zhang W., Zhang D. Multi-scale retinex-based adaptive gray-scale transformation method for underwater image enhancement. *Multimedia Tools and Applications*. 2021.
16. Yu J., Zhang B., Chen W., Liu H. Multi-scale analysis on the tensile properties of UHPC considering fiber orientation. *Composite Structures*. 2022. Т. 280. С. 114835.
17. Дворников С.В., Дворников С.С., Спирин А.М. Синтез манипулированных сигналов на основе вейвлет-функций // Информационные технологии. 2013. № 12. С. 52-55.
18. S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1999. EDN: YGCTMD.

19. Bozhokin S., Suslova I., Tarakanov D. Special techniques in applying continuous wavelet transform to non-stationary signals of heart rate variability. *Communications in Computer and Information Science* (см. в книгах). 2020. Т. 1211 CCIS. С. 291-310.
20. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. – 1998.– Т. 166 – № 11 – С. 1145–1170
21. Yu Q., Avestimehr A.S. Coded computing for resilient, secure, and privacy-preserving distributed matrix multiplication. *IEEE Transactions on Communications*. 2021. Т. 69. № 1. С. 59-72.
22. Ahmed I.T., Hammad B.T., Der C.S., Jamil N. Contrast-distorted image quality assessment based on curvelet domain features. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2021. Т. 11. № 3. С. 2595-2603.
23. Saccenti, E., Hendriks, M.H.W.B. & Smilde, A.K. Corruption of the Pearson correlation coefficient by measurement error and its estimation, bias, and correction under different error models. *Sci Rep* 10, 438 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-019-57247-4>.

Dvornikov Sergey — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Department of radio engineering and optoelectronic complexes, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation"; Researcher, Military Academy of Communication. Research interests: construction of noise-immune radio communication systems, methods of generating and processing signals of complex structures. The number of publications — 283. practicsv@yandex.ru; 3, Tikhoretsky Av., 194064, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)247-9811.

Dvornikov Sergey — Ph.D., Senior lecturer, Department of design and technologies of electronic and laser means, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation"; Researcher, Research department, Military Academy of Communication. Research interests: theory of signal transmission, spectral efficiency of signals, noise immunity of control and communication channels of radio engineering systems. The number of publications — 114. dvornik.92@mail.ru; 3, Tikhoretskiy Av., 194064, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)247-9820.

Ustinov Andrew — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading researcher, FGUP "GosNIIPP". Research interests: theory of communication, noise immunity of infocommunication channels of radio engineering systems, compression of video and speech information. The number of publications — 150. ust_m_a@mail.ru; 29, Emb. of the Obvodny Canal, 191167, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)274-3156.