АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. П. Соколова*, Р. С. Ивлев**

*Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39
<sokolova_sv@mail.ru>

**Институт проблем информатики и управления МОН РК,
480100, Алматы, ул.Пушкина, д.125
<Ivlevruslan@newmail.ru>

УДК 681.5
С. П. Соколова, Р. С. Ивлев. **Асимптотическая устойчивость интервальной нелинейной системы с запаздыванием** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.
Аннотация. *В работе предложена методика исследования и получены достаточные условия асимптотической устойчивости с использованием функционала Ляпунова-Красовского и методов интервального анализа для нелинейной интервальной системы с запаздывающим аргументом.* — Библ. 24 назв.

UDC 681.5
S. P. Sokolova, R. S. Ivlev. **Asymptotic stability of interval nonlinear time-delay system** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.
Abstract. *In the paper an approach for investigating asymptotic stability of nonlinear interval time-delay system is proposed on the base of Lyapunov's direct method and interval analysis. A sufficient condition of asymptotic stability is obtained using the concept of Lyapunov-Krasovsky functional*. — Bibl. 24 items.

1. Введение

Впервые сформулированная в [1], а затем исследованная и получившая исчерпывающее решение в [2] задача об асимптотической устойчивости интервального характеристического полинома послужила толчком для дальнейших исследований в этой области. Последующее развитие подходов работы [2] позволило ее автору обобщить полученные результаты на случай интервальных квазиполиномов [3], встречающихся при исследовании дифференциально-разностных уравнений. Среди более поздних работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости положения равновесия дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом, следует указать работу [4] и имеющиеся там ссылки, являющуюся развитием работы [3]. В работе [4] получены достаточные условия асимптотической устойчивости интервального квазиполинома на основе исследования четырех функций, построенных специальным образом.

Несколько иное положение дел обстоит в области исследования динамических свойств интервальных систем, заданных в пространстве состояний. Попытки обобщить результаты работы [2] и получить аналоги теорем Харитонова для интервальных матриц [5] потерпели неудачу, о чем свидетельствуют убедительные контрпримеры [6, 7]. В настоящее время имеется достаточно много работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости линейных интервальных систем, заданных в пространстве состояний, среди которых, по мнению авторов, наиболее плодотворной в своей области является работа [8]. Среди работ, в которых исследуется устойчивость динамических систем с запаздывающим аргументом и неточно заданными параметрами, можно отметить работу [9], в которой применяется квадратичный функционал для исследования экспоненциальной устойчивости линейной системы с запаздыванием. В работе [9] параметрическая неопределенность задается в виде принадлежности неточно известных параметров некоторому множеству, границами которого являются поверхности второго порядка. Наряду с результатами упомянутых работ для динамических систем с запаздывающим аргументом, заданных в пространстве состояний, представляет также большой научный интерес получение условий устойчивости при наличии интервального типа неопределенности.

2. Обозначения и постановка задачи

Всюду в работе полужирным шрифтом будут обозначаться интервальные величины, в то время как обычным шрифтом — неинтервальные. Символом подчеркивания и надчеркивания будут обозначаться соответственно нижняя и верхняя границы интервала;

$mid\ \mathbf{a} = (\underline{a} + \overline{a})/2$ — середина интервала $\mathbf{a}$;

$rad\ \mathbf{a} = (\overline{a} - \underline{a})/2$ — радиус интервала $\mathbf{a}$.

Операции mid ,rad , взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле.

Пусть возмущенное движение интервальной нелинейной системы в пространстве состояний представляется векторно-матричным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1 x(t-\tau) + X(t)\mathbf{B}x(t), \qquad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta), \quad \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{1}$$

где $t \in [t_0 - \tau, \infty)$ — независимая переменная (время); $t_0 \in R$ — начальный момент времени; $\tau \in R_+$ — запаздывание; $x(t)$ — вектор состояний размерности $(n \times 1)$, $x(t) = (x_i(t)), x_i(t)$ — непрерывные на $[t_0 - \tau, \infty)$ функции, $i = 1,2,\ldots,n$. Матрица $X(t)$ размерности $(n \times n^2)$ является блочно-диагональной $X(t) = Diag\{x^T(t)\}$, т.е. $X(t)$ имеет одинаковые блочно-диагональные элементы равные транспонированному вектору состояний $x^T(t)$. Постоянные интервальные матрицы размерности $(n \times n)$: $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1 \in IR^{n \times n}$, IR — множество всех вещественных интервалов [10, 11], $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$; $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{a}_{1ij})$, $\mathbf{a}_{1ij} = [\underline{a}_{1ij}, \overline{a}_{1ij}]$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, Интервальная матрица $\mathbf{B}$ размерности $(n^2 \times n)$, $\mathbf{B} \in IR^{n^2 \times n}$, имеет следующий блочный вид $\mathbf{B}=(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2,\ldots,\mathbf{B}_n)^T$, где $\mathbf{B}_i \in IR^{n \times n}$ — интервальные матрицы размерности $(n \times n)$, $i = 1,2,\ldots,n$. $\varphi_{t_0\tau}(\theta): [t_0 - \tau, t_0] \to R^n$ — начальная вектор-функция, принадлежащая пространству непрерывных на $[t_0 - \tau, t_0]$ вектор-функций $\varphi_{t_0\tau}(\theta) \in C[t_0 - \tau, t_0]$.

Всюду в дальнейшем математическую модель системы, записанную в виде (1), будем понимать как семейство математических моделей систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-\tau) + X(t)Bx(t), \qquad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta), \quad \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{2}$$

для которых $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$, $B \in \mathbf{B}$.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Определение 1. *Нелинейная интервальная система (1) обладает свойством асимптотической устойчивости, если для любых матриц* $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$, $B \in \mathbf{B}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что при всяком* $t \geq t_0$ *и при всяких начальных функциях* $\varphi_{t_0 \tau}(\theta)$, *заданных на отрезке* $[t_0 - \tau, t_0]$, *удовлетворяющих условию* $\left\| \varphi_{t_0 \tau}(\theta) \right\|_\tau < \delta$, *решение* $x(t, \varphi_{t_0 \tau})$ *системы (2) удовлетворяет условиям*

$$\left\| x(t, \varphi_{t_0 \tau}) \right\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \infty} \left\| x(t, \varphi_{t_0 \tau}) \right\| = 0,$$

где $\left\| \varphi_{t_0 \tau} \right\|_\tau = \max\limits_{t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0} \left\| \varphi_{t_0 \tau}(\theta) \right\|$ *и* $\|\cdot\|$ — *евклидова норма в* R^n.

Множество непрерывных начальных функций $\varphi_{t_0 \tau}(\theta)$, $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, при которых для любых $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$ и $B \in \mathbf{B}$ решение системы (2) притягивается к началу координат, будем называть областью притяжения начала координат.

Требуется определить условия, при которых нелинейная интервальная система с запаздыванием вида (1) будет обладать свойством асимптотической устойчивости в указанном выше смысле.

3. Предварительные сведения

В настоящее время наметилось два основных подхода к решению задачи исследования асимптотической устойчивости для систем управления с отклоняющимся аргументом, заданных в пространстве состояний. Оба подхода основаны на идее использования прямого метода Ляпунова [12, 13], суть которого применительно к дифференциальным уравнениям возмущенного движения системы заключается в выборе некоторой непрерывной функции $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, играющей роль обобщенного расстояния до начала координат. Убывание этой функции вдоль траекторий движения системы будет означать устойчивость положения равновесия $x(t) \equiv 0$. Непосредственный перенос прямого метода Ляпунова на класс дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом имеет ряд ограничений. Как правило, они заключаются в сложности определения условий убывания функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы. Поэтому в обоих вышеупомянутых подходах сделано основное усилие на их преодоление. Первый из них основан на использовании принципа Разумихина, скалярно-оптимизационной функции и построения эффективных оценок воронок для отрезков интегральных линий дифференциального уравнения [12]. Однако более плодотворной оказалась идея Н.Н. Красовского [13], предложившего использовать вместо функций Ляпунова функционалы, обладающие аналогичными свойствами. Замечателен тот факт, что для рассматриваемого класса интервальных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом вида (1) может быть применена без существенных изменений теорема Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости [13]. Применительно к (1) условия теоремы представляются в виде:

Теорема 1. *Положение равновесия* $x(t, \varphi_{t_0 \tau}) \equiv 0$ *с начальной функцией* $\varphi(t) \equiv 0$, $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$ *системы (1) асимптотически устойчиво, если существует функционал* $V(x(t+s), t)$, *удовлетворяющий условиям:*

$$V(x(t+s),t) \le W_1(\|x(t)\|) + W_2\left(\|x(t)\|_{\tau_2}\right); \tag{3}$$

$$V(x(t+s),t) \ge W(\|x(t)\|); \tag{4}$$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \le -\psi(\|x(t)\|), \tag{5}$$

где $W_1(r)$ *и* $W_2(r)$ *— монотонно возрастающие функции при* $r \ge 0$*, причем* $W_1(0) = W_2(0) = 0$*,* $W(r)$ *и* $\psi(r)$ *— непрерывные, положительные при* $r > 0$ *функции,*

$$\|x(t)\|_{\tau_2} = \left(\int_{-\tau}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t+s) ds \right)^{1/2},$$

переменная s *изменяется в пределах* $-\tau \le s \le 0$.

Легко видеть [13], что функционал

$$V(x(t+s)) = x^T(t) H x(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+\nu) D x(t+\nu) d\nu, \tag{6}$$

где $H = H^T \in R^{n \times n}$ — положительно определенная симметрическая матрица, $D = diag\{d_i > 0,\ 1 \le i \le n\}$ — диагональная матрица, удовлетворяет условиям (3) и (4) теоремы Н.Н. Красовского.

Для точечных матриц $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$, $B \in \mathbf{B}$ значение правого верхнего производного числа $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup(\Delta V / \Delta t)$ совпадает с обычной производной функционала (6) по времени в силу (2). Однако его вычисление для выбранного функционала (6) в силу уравнений (1), где верхняя грань берется по всем матрицам $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$, $B \in \mathbf{B}$, может оказаться весьма трудоемкой на практике задачей.

4. Основной результат

В этом разделе будут получены достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия $x(t, \varphi_{t_0 \tau}) \equiv 0$ рассматриваемой нелинейной интервальной системы с запаздыванием вида (1). Для проведения дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

Определение 2. *Интервальную квадратную матрицу* $\mathbf{Q} \in IR^{n \times n}$*,* $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$*,* $\mathbf{q}_{ij} = \left[\underline{q}_{ij}, \overline{q}_{ij}\right]$*,* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *будем называть положительно определенной и записывать* $\mathbf{Q} \rhd 0$*, если положительно определена любая матрица* $Q \in \mathbf{Q}$*, т.е.* $\forall Q \in \mathbf{Q}$ *квадратичная форма* $x^T Q x > 0, \forall x \in R^n \setminus \{0\}$.

Определение 3. [14] *Множество матриц вида*

$$\mathbf{Q}^{sym} = \left[\underline{Q}^{sym}, \overline{Q}^{sym}\right] = \left\{ Q \in R^{n \times n} \middle| Q = Q^T, \underline{Q}^{sym} \le Q \le \overline{Q}^{sym} \right\},$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать $\mathbf{Q}^{sym} = \left(\mathbf{Q}^{sym}\right)^T$.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Из определения 3 ясно, что нижняя и верхняя границы $\underline{Q}^{sym}, \overline{Q}^{sym} \in R^{n\times n}$ являются симметрическими матрицами

$$\underline{Q}^{sym} = \left(\underline{Q}^{sym}\right)^T, \qquad \overline{Q}^{sym} = \left(\overline{Q}^{sym}\right)^T,$$

а матрица $\mathbf{Q}^{sym} \notin IR^{n\times n}$ в обычном смысле для $n > 1$. Аналогично, $\mathbf{Q}^{sym} \notin IR^{n\times n}$, даже если один внедиагональный элемент матрицы является невырожденным интервалом.

Используя арифметические операции классической интервальной арифметики [10, 11], вычислим интервальные матрицы и $\mathbf{B}_j\mathbf{B}_i^T$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, и осуществим их симметрирование, т.е.

$$\mathbf{G}_{ij} = \left(\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j\mathbf{B}_i^T\right)/2, \qquad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

Введем в рассмотрение величины

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} \max\left\{\left|\min_{G_{ij}=G_{ij}^T\in\mathbf{G}_{ij}} \lambda\left(G_{ij}\right)\right|, \left|\max_{G_{ij}=G_{ij}^T\in\mathbf{G}_{ij}} \Lambda\left(G_{ij}\right)\right|\right\}, \qquad i, j = 1,2,\ldots,n,$$

где $\lambda(\cdot)$ и $\Lambda(\cdot)$ — соответственно, минимальное и максимальное собственные значения квадратной вещественной симметрической матрицы.

Построим множество

$$\mathcal{E}(t,\mu) = \left\{ x(\theta) \in C[t-\tau, t] \,\middle|\, V(x(t+s)) \le \lambda(H)\mu \Big/ \max_i\{l_i\} \right\}, \tag{7}$$

где $\mu \in R$, $\mu > 0$.

Определение 4. *Множество квадратных матриц $H \in R^{n\times n}$ вида*

$$\Sigma_{tol}\left(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{sym}\right) = \left\{H \in R^{n\times n} \,\middle|\, (\forall A \in \mathbf{A})\left(\exists Q \in \mathbf{Q}^{sym}\right)\left(A^T H + HA + HH = -Q\right)\right\} \tag{8}$$

называется допустимым множеством решений интервального матричного уравнения

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} + HH = -\mathbf{Q}^{sym}. \tag{9}$$

Условия асимптотической устойчивости исследуемой системы дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для заданных интервальных матриц $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{A}_1 \in R^{n\times n}$ и $\mathbf{B} \in R^{n^2\times n}$ и некоторой интервальной симметрической положительно определенной матрицы $\mathbf{Q}^{sym}$ выполнены следующие условия:*

- *допустимое множество решений (8) интервального матричного уравнения (9) непусто, т.е. существует $H^* \in \Sigma_{tol}\left(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{sym}\right) \ne \varnothing$,*
- *матрица H^* является симметрической положительно определенной,*
- *интервальная матрица*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T H^* + H^*\mathbf{A} + H^*H^* + D & H^*\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^T H^* & -D \end{pmatrix} \tag{10}$$

является отрицательно определенной.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда положение равновесия $x(t,\varphi_{t_0\tau}) \equiv 0$ *исследуемой системы (1) асимптотически устойчиво и множество* $\mathcal{E}(t_0,\mu)$ *при* $0 < \mu < \min_{Q \in \mathbf{Q}^{sym}} \lambda(Q)$ *принадлежит области притяжения начала координат.*

Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Представляется целесообразным рассмотрение некоторых вопросов практического применения доказанной теоремы. В частности, решить следующие задачи:

- распознавания непустоты допустимого множества решений (8) интервального матричного уравнения (9);
- выбора интервальной симметрической положительно определенной матрицы $\mathbf{Q}^{sym}$;
- определения величины $\mu > 0$ и величин $d_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ из условия отрицательной определенности интервальной матрицы $\mathbf{C}$.

Исчерпывающее решение задачи распознавания непустоты допустимого множества решений для случая интервальных систем линейных алгебраических уравнений получено в [15, 16]. В рассматриваемом случае матричное уравнение (9) является нелинейным, матрица $\mathbf{Q}^{sym} \notin IR^{n\times n}$ в общем случае, поскольку значения внедиагональных элементов матрицы $Q \in \mathbf{Q}^{sym}$, лежащих симметрично относительно главной диагонали, принимают не произвольные сочетания значений, а лишь связанные соотношениями равенства. Аналогичным образом, коэффициенты первых двух слагаемых левой части интервального матричного уравнения (9) также принимают не произвольные сочетания значений из заданных интервалов, а лишь те, которые связаны соотношениями равенства соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$. Тем не менее, результаты [15, 16] могут быть с успехом применены для рассматриваемого случая. Чтобы показать это, выполним ряд дополнительных построений: по заданной интервальной матрице $\mathbf{Q}^{sym}$ построим матрицу $\mathbf{Q} = \left[\underline{Q}^{sym}; \overline{Q}^{sym}\right] \in IR^{n\times n}$ и множество

$$\begin{aligned}\Sigma_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) = \left\{ H \in R^{n\times n} \,\middle|\, (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q})\left(A^T H + HA + HH = -Q\right)\right\} \supseteq \\ \supseteq \left\{ H \in R^{n\times n} \,\middle|\, \mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} + HH \subseteq -\mathbf{Q}\right\},\end{aligned} \quad (11)$$

которое является допустимым множеством решений интервального уравнения

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} + HH \subseteq -\mathbf{Q} \quad (12)$$

и имеет в правой части интервальную матрицу $\mathbf{Q} \in IR^{n\times n}$ без связей.

Теорема 3. *Пусть допустимое множество решений (11) интервального матричного уравнения (12) непусто, и некоторая симметрическая матрица* $\widetilde{H} = \widetilde{H}^T$ *принадлежит данному множеству, т.е.*

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}^T \in \Sigma_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) \neq \varnothing, \quad (13)$$

тогда

$$\left\{\widetilde{H} \in R^{n\times n} \,\middle|\, \widetilde{H} \in \Sigma_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{Q}),\ \widetilde{H} = \widetilde{H}^T\right\} \subseteq \Sigma_{tol}\left(\mathbf{A},\mathbf{Q}^{sym}\right). \quad (14)$$

Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Легко показать, что соотношение относительно матрицы H

$$\left| mid\,\mathbf{A}^T H + H mid\,\mathbf{A} + HH + mid\,\mathbf{Q} \right| \le rad\,\mathbf{Q} - rad\,\mathbf{A}^T |H| - |H| rad\,\mathbf{A}, \quad (15)$$

аналогичное соотношению, используемому в [17], выделяет класс матриц H, принадлежащих множеству (11). Из соотношения (15) видно, что если некоторая матрица $\widetilde{H}$ является решением “среднего” точечного уравнения

$$mid\,\mathbf{A}^T\widetilde{H}+\widetilde{H}mid\,\mathbf{A}+\widetilde{H}\widetilde{H}=-mid\,\mathbf{Q} \tag{16}$$

и удовлетворяет условию

$$rad\,\mathbf{A}^T\left|\widetilde{H}\right|+\left|\widetilde{H}\right|rad\,\mathbf{A}\le rad\,\mathbf{Q}, \tag{17}$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, то

$$\widetilde{H}\subseteq\Sigma_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{Q}).$$

Выбор интервальной положительно определенной матрицы $\mathbf{Q}$ является самостоятельной задачей, поэтому здесь наметим только возможные подходы. Один из наиболее простых подходов построения интервальной положительно определенной матрицы основывается на применении кругов Гершгорина, хорошо известных в матричном анализе [18]. Этот же подход применим и для определения положительных величин d_i, $i=1,2,\ldots,n$ (последнее условие теоремы 2), а также для определения оценок вещественных частей собственных значений интервальных матриц. В этой связи следует также отметить, что последнее условие теоремы 2 представляет собой линейное матричное неравенство [19]. В работе [20] можно найти методы решения таких неравенств для интервальных матриц. Немаловажным вопросом является вопрос определения оценок для вещественных частей собственных значений интервальных матриц. Для этого можно воспользоваться результатами исследования свойств спектра собственных значений интервальной матрицы [21].

5. Числовой пример

Рассмотрим нелинейную интервальную систему с запаздывающим аргументом для $n=3$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=[-1.2,-1.0]x_1(t)+x_2(t)+[-0.01,0.01]x_2(t-\tau)+[0.1,0.2]x_1^2(t);\\ \dot{x}_2(t)=[-1,-0.9]x_1(t)-x_2(t)+[-0.1,0]x_3(t)+[0,0.5]x_1(t-\tau);\\ \dot{x}_3(t)=[0,0.1]x_2(t)-x_3(t)+[0.1,0.2]x_2(t-\tau)-[-0.1,-0.1]x_3(t-\tau);\end{cases}$$

$$x_i(\theta)=\varphi_{i_{t_0\tau}}(\theta),\qquad \theta\in[t_0-\tau,t_0],\qquad 1\le i\le n.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}[-1.2,-1.0] & 1 & 0\\ [-1,-0.9] & -1 & [-0.1,0]\\ 0 & [0,0.1] & -1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}0 & [-0.01,0.01] & 0\\ [0,0.05] & 0 & 0\\ 0 & [0.1,0.2] & [-0.1,-0.1]\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}[0.1,0.2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Матрицы $\mathbf{B}_i$, $i=2,3,\ldots,n$, являются нулевыми.

Интервальная положительно определенная матрица

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} [0.6,1.4] & [-0.2,0.2] & [-0.2,0.2] \\ [-0.2,0.2] & [0.9,1.1] & [-0.2,0.2] \\ [-0.2,0.2] & [-0.2,0.2] & [0.9,1.1] \end{pmatrix} \tag{19}
$$

имеет в качестве средней матрицы единичную, т.е.

$$
mid\mathbf{Q} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

а решение “среднего” матричного уравнения (16) для

$$
mid\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1.1 & 1 & 0 \\ -0.95 & -1 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & -1 \end{pmatrix}
$$

и $mid\,\mathbf{Q} = E$ имеет вид

$$
\widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0.707151 & -0.028814 & -0.009662 \\ -0.028814 & 0.762911 & 0.005555 \\ -0.009662 & 0.005555 & 0.979233 \end{pmatrix}, \tag{20}
$$

которое удовлетворяет матричному неравенству (17), так как

$$
rad\mathbf{A}^T \left|\widetilde{H}\right| + \left|\widetilde{H}\right| rad\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.144312 & 0.041510 & 0.002685 \\ 0.041510 & 0.000555 & 0.087107 \\ 0.002685 & 0.087107 & 0.000555 \end{pmatrix},
$$

где

$$
rad\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad rad\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Матрица (20) является положительно определенной, следовательно, рассматриваемая интервальная матрица (18) является асимптотически устойчивой. Матрицу D определим из условия отрицательной определенности матрицы (10), имеем

$$
\widetilde{H}\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [-0.001441,0.000000] & [-0.009004,0.006105] & [0.000966,0.000966] \\ [0.000000,0.038146] & [0.000267,0.001399] & [-0.000555,-0.000555] \\ [0.000000,0.000278] & [0.097827,0.195943] & [-0.097923,-0.097923] \end{pmatrix}.
$$

$$
\mathbf{A}_1^T \widetilde{H} = \left(\widetilde{H}\mathbf{A}_1\right)^T .
$$

Округляя полученные результаты до 3-го знака, запишем интервальную матрицу $\mathbf{C}$

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1.144,-0.856]+d_1 & [-0.042,0.042] & [-0.003,0.003] \\ [-0.042,0.042] & [-1.001,-0.999]+d_2 & [-0.087,0.087] \\ [-0.003,0.003] & [-0.087,0.087] & [-1.001,-0.999]+d_3 \\ [-0.001,0.000] & [0.000,0.038] & [0.000,0.000] \\ [-0.009,0.006] & [0.000,0.001] & [0.098,0.196] \\ [0.001,0.001] & [-0.001,-0.001] & [-0.098,-0.098] \end{pmatrix}
$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$
\left.\begin{matrix}
[-0.001, 0.000] & [-0.009, 0.006] & [0.001, 0.001] \\
[0.000, 0.038] & [0.000, 0.001] & [-0.001, -0.001] \\
[0.000, 0.000] & [0.098, 0.196] & [-0.098, -0.098] \\
-d_1 & 0 & 0 \\
0 & -d_2 & 0 \\
0 & 0 & -d_3
\end{matrix}\right) ,
$$

где $\underline{C} = \underline{C}^T$, $\overline{C} = \overline{C}^T$. Легко видеть, что интервальная матрица **C** является отрицательно определенной при значениях $d_1 = d_2 = d_3 = 0.3 > 0$, так как круги Гершгорина расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Матрицы $\mathbf{G}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, являются нулевыми, кроме матрицы

$$
\mathbf{G}_{11} = \begin{pmatrix} [0.01, 0.04] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

В силу специального вида матриц $\mathbf{G}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, легко найти величину $\max_i \{l_i\} = 0.04$. Для найденного решения (20) имеем $\lambda(\widetilde{H}) = 0.6948$. Используя круги Гершгорина, несложно определить нижнюю положительную оценку вещественной части спектра интервальной матрицы $\mathbf{Q}^{sym} : 0 < \mu^* < 0.2$. На основании теоремы 2 заключаем, что положение равновесия $x(t, \varphi_{t_0 \tau}) \equiv 0$ исследуемой системы (1) асимптотически устойчиво и множество $\varepsilon(t_0, \mu^*)$ для найденных значений величин $\max_i \{l_i\}$, $\lambda(\widetilde{H})$ и μ^* принадлежит области притяжения начала координат.

6. Заключение

Предложенный подход (качественный метод с использованием функционала Ляпунова–Красовского) к исследованию асимптотической устойчивости нелинейных интервальных систем с запаздывающим аргументом имеет приемлемую для практики вычислительную сложность и является эффективным в достаточно широком диапазоне случаев. Этот подход также применим и для интервальных систем с другими классами нелинейностей.

Приложение

Доказательство теоремы 1.

Вычисляя первую производную по времени функционала (6) на траекториях движения каждого представителя семейства (2), получим семейство производных

$$
\dot{V}(x(t+s))\Big|_{(\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-\tau) + X(t) Bx(t))} , \qquad A \in \mathbf{A} ,\ A_1 \in \mathbf{A}_1 ,\ B \in \mathbf{B} . \qquad (21)
$$

Учитывая конкретное выражение для функционала, выполним несложные преобразования

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\dot V(x(t+s)) = \dot x^T(t)Hx(t) + x^T(t)H\dot x(t) + x^T(t)Dx(t) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) =$$
$$= (Ax(t) + A_1x(t-\tau) + X(t)Bx(t))^T Hx(t) + x^T(t)H(Ax(t) + A_1x(t-\tau) + X(t)Bx(t)) +$$
$$+ x^T(t)Dx(t) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) = x^T(t)\left(A^TH + HA + HH + D\right)x(t) -$$
$$- x^T(t)(X(t)B - H)(X(t)B - H)^T x(t) + x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) +$$
$$+ x^T(t-\tau)A_1^THx(t) + x^T(t)HA_1x(t-\tau) \le$$
$$\le x^T(t)\left(A^TH + HA + HH + D\right)x(t) + x^T(t)X(t)BB^TX(t)x(t) -$$
$$- x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) + x^T(t-\tau)A_1^THx(t) + x^T(t)HA_1x(t-\tau) =$$
$$= y^T(t+s)Cy(t+s) + x^T(t)X(t)BB^TX^T(t),$$

где вектор $y(t+s) = (y_i(t+s))$, $1 \le i \le 2n$, и матрица $C \in R^{2n\times 2n}$ имеют соответственно вид

$$y(t+s) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A^TH + HA + D & HA_\tau \\ A_\tau^TH & -D \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы существует такая симметрическая положительно определенная матрица $H^* \in R^{n\times n}$ и такая диагональная матрица D, что для любых значений $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$, $B \in \mathbf{B}$ интервальная матрица $\mathbf{C}$ является отрицательно определенной. Тогда для любых $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \in \mathbf{A}_1$ и $B \in \mathbf{B}$ при положительных значениях $\mu \in R$, удовлетворяющих неравенству $0 < \mu < \min_{C\in\mathbf{C}} \lambda(-C)$, справедливым будет следующее неравенство:

$$y^T(t+s)Cy(t+s) + x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t) <$$
$$< -\mu y^T(t+s)y(t+s) + x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t).$$

Определим множество отрезков интегральных кривых $x(\theta)$, $\theta \in [t-\tau, t]$ таких, что правая часть в последнем неравенстве будет неположительной для любой $B \in \mathbf{B}$. Для этого достаточно, чтобы для любой $B \in \mathbf{B}$ следующая симметрическая матрица

$$\mu I - X(t)BB^TX^T(t), \tag{22}$$

где I — единичная матрица порядка n, была неотрицательно определена, т.е. все ее собственные значения располагались в правой полуплоскости комплексной плоскости. Используя теорему [18], заключаем, что для этого достаточно, чтобы круги Гершгорина матрицы (22) располагались в правой полуплоскости комплексной плоскости. Принимая во внимание развернутое представление этой матрицы, получаем неравенство

$$\mu \ge \sum_{j=1}^{n} \left| x^T(t)B_iB_j^Tx(t) \right|, \quad B_i \in \mathbf{B}_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{23}$$

Оценим сверху сумму

$$\sum_{j=1}^{n} \left| x^T(t)B_iB_j^Tx(t) \right|, \quad B_i \in \mathbf{B}_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

для чего выполним следующие преобразования:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|x^T(t)B_i B_j^T x(t)\right| \le \|x(t)\|^2 \sum_{j=1}^{n} \max\left\{\left|\min_{B_i\in\mathbf{B}_i B_j\in\mathbf{B}_j} \lambda\left(\frac{1}{2}\left(B_i B_j^T + B_j B_i^T\right)\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|\max_{B_i\in\mathbf{B}_i B_j\in\mathbf{B}_j} \Lambda\left(\frac{1}{2}\left(B_i B_j^T + B_j B_i^T\right)\right)\right|\right\} \le$$

$$\|x(t)\|^2 \sum_{j=1}^{n} \max\left\{\left|\min_{G_{ij}=G_{ij}^T\in\mathbf{G}_{ij}} \lambda(G_{ij})\right|, \left|\max_{G_{ij}=G_{ij}^T\in\mathbf{G}_{ij}} \Lambda(G_{ij})\right|\right\} = = l_i\|x(t)\|^2, B_i\in\mathbf{B}_i,$$

$i = 1,2,\ldots,n$.

Из приведенных соотношений легко видеть, что для отрезков интегральных кривых $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\|x(t)\|^2 \le \mu/l_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{24}$$

неравенство (23) выполнено.

Из соотношения

$$V(x(t+s)) \ge \lambda H\|x(t)\|^2$$

заключаем, что неравенство (24) будет выполнено, если

$$V(x(t+s)) \le \lambda(H)\mu\Big/\max_i l_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, для всех $x(t+s)$, удовлетворяющих последнему неравенству, т.е. для $x\in\mathcal{E}(\mu)$ симметрическая матрица (22) будет неотрицательно определенной для любой $B\in\mathbf{B}$. Тогда в области $\mathcal{E}(\mu)$ первая производная по времени функционала (6) на траекториях движения каждой системы семейства (2) удовлетворяет неравенству

$$\dot V(x(t+s))\Big|_{(\dot x(t)=Ax(t)+A_1x(t-\tau)+X(t)Bx(t))} <$$

$$-\mu y^T(t+s)y(t+s) + x^T(t)X(t)BB^T X^T(t)x(t) \le 0.$$

равномерно по $A\in\mathbf{A}$, $A_1\in\mathbf{A}_1$ и $B\in\mathbf{B}$. Используя известные результаты [22, 23], заключаем, что положение равновесия $x(t,\varphi_{t_0\tau})\equiv 0$ асимптотически устойчиво, а множество (7) принадлежит области притяжения начала координат.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

Пусть условие (13) теоремы выполнено. По условию теоремы существует некоторая симметрическая матрица $\widetilde H = \left(\widetilde H\right)^T \in \Sigma_{tol}(\mathbf{A},\mathbf{A}_1,\mathbf{Q})$, тогда

$$\left(A^T\widetilde H + \widetilde H A + \widetilde H\widetilde H\right)^T = \widetilde H^T A + A^T\widetilde H^T + \widetilde H^T\widetilde H^T =$$
$$= \widetilde H A + A^T\widetilde H + \widetilde H\widetilde H = A^T\widetilde H + \widetilde H A + \widetilde H\widetilde H, \qquad \forall A\in\mathbf{A}, \tag{25}$$

т.е. матрица $A^T\widetilde H + \widetilde H A + \widetilde H\widetilde H$ является симметрической для любой $A\in\mathbf{A}$. По условию теоремы

$$A^T\widetilde H + \widetilde H A + \widetilde H\widetilde H \in -\mathbf{Q}, \qquad \forall A\in\mathbf{A}. \tag{26}$$

Принимая во внимание (25) и (26), можно заключить, что существует симметрическая матрица $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^T \in \mathbf{Q}$ такая, что

$$A^T \widetilde{H} + \widetilde{H}A + \widetilde{H}\widetilde{H} \in -\widetilde{Q}.$$

Согласно определению 3 имеем

$$\mathbf{Q}^{sym} = \left\{ Q \in R^{n \times n} \middle| Q \in \mathbf{Q},\ Q = Q^T \right\}, \tag{27}$$

т.е.

$$\mathbf{Q}^{sym} \subseteq \mathbf{Q},$$

тогда, учитывая выражение (27), можно записать

$$A^T \widetilde{H} + \widetilde{H}A + \widetilde{H}\widetilde{H} \in -\mathbf{Q}^{sym}.$$

Последнее верно для произвольной симметрической матрицы $\widetilde{H}$, удовлетворяющей (13), следовательно, включение (14) является справедливым.

Теорема доказана.

Литература

[1] *Faedo S.* Ann. Scuola norm. super // Pisa sci fis e math. 1953. **7**. № 1–2.

[2] *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. **14**. № 11. — с.2086–2088.

[3] *Харитонов В. Л*. Проблема Рауса-Гурвица для семейств полиномов и квазиполиномов // Математическая физика. 1979. № 26. — с.69–79.

[4] *Харитонов В. Л*. Семейства устойчивых квазиполиномов // АиТ. 1991. № 7. — с.75–88.

[5] *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Contr. 1983. V. 37, № 4.

[6] *Karl W. C., Greschak J. P., Vergese G. C.* Comments on 'A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Contr. 1984. V. 39, № 4.

[7] *Barmish B. R., Hollot C. V.* Counter-example to a recent on the stability of interval matrices by Bialas // Int. J. Contr. 1984. V. 39, № 5.

[8] *Rohn J.* An Algorithm for Checking Stability of Symmetric Inreval Matrices // IEEE Transactions on Automatic Control. 1996. Vol. XX, № V.

[9] *Kharitonov V. L., Zhabko A. P.* Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica 39(1), 2003, pp.15–20.

[10] *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир. 1987.

[11] *Шокин Ю. И.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.

[12] *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука. 1988. — 108 с.

[13] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. — 211 с.

[14] *Jansson C.* Interval Linear Systems with Symmetric Matrices, Skew-Symmetric Matrices and Dependencies in the Right Hand Side // Computing 46. Hamburg-Harburg. 1990.

[15] *Shary S. P.* Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulations. 1995, 39. pp.53–85.

[16] *Shary S. P.* Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetics // Reliable Computing. 1996. 2. № 1. — p. 3–33.

[17] *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[18] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[19] *S.Boyd A. O.* Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.

[20] *G. Calafiore, B. Polyak.* Stochastic algorithms for exact and approximate feasibility of robust LMIs, IEEE Trans. Autom. Control, 2001, V. 46, № 11, pp.1755–1759.

[21] *Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P.* Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. Kluwer, Dordrecht, 1997.

[22] *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука. Главная редакция физико-математических наук, 1969.
[23] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. Главная редакция физико-математических наук, 1967.
[24] *Sokolova S. P. and Ivlev R. S.* Asymptotic Stability of Interval Time-Delay Systems // Reliable Computing. 2003. № 9, pp.303–313.