АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА ПО КООРДИНАТАМ ЕГО ВЕРШИН

С. Б. Калачева
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39
svet@iias.spb.su

УДК 681.3
С. Б. Калачева. **Алгоритм вычисления площади многоугольника по координатам его вершин** // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 3. — СПб: СПИИРАН, 2003.
Аннотация*.* *В статье приводится алгоритм вычисления площади многоугольника по координатам его вершин для многоугольников с непересекающимися ребрами.* — Библ.1 назв.

UDC 681.3
S. B. Kalacheva. **Algorithm of calculation of polygon square on its vertexes coordinates** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v.3. — SPb: SPIIRAS, 2003.
Abstract. *Algorithm of calculation of polygon square on coordinates of its its vertexes is presented in this paper for polygon with not intersect edges.* — Bibl.1 item.

В ряде приложений существует проблема вычисления площади многоугольника по координатам его вершин. Эта задача решается, в частности, методом трапеций [1] после предварительного ранжирования координат вершин. Однако, предварительное ранжирование в ряде случаев не всегда удобно. Поэтому предлагается алгоритм, где достаточно исходного упорядочения вершин по часовой или против часовой стрелки, а операция упорядочения координат по величине заменяется более простой процедурой вычисления минимума и максимума.

Основная идея алгоритма заключается в следующем. Сначала строится минимальный прямоугольник, содержащий данный многоугольник, со сторонами, параллельными осям координат, и вычисляется его площадь. Затем для каждого ребра многоугольника строится трапеция (в вырожденном случае треугольник) со сторонами, параллельными осям координат, и с отрезком стороны данного прямоугольника. Площади трапеций вычисляются и вычитаются из площади прямоугольника.

Пусть многоугольник с непересекающимися ребрами имеет координаты $\{(X_i, Y_i)\}$ $i=\overline{1,n}$, n — число вершин многоугольника. Минимальный охватывающий прямоугольник будет ограничен линиями $x=X_{\min}$, $x=X_{\max}$, $y=Y_{\min}$, $y=Y_{\max}$,

где

$X_{\min}=\min\limits_i \{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$,

$X_{\max}=\max\limits_i \{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$,

$Y_{\min}=\min\limits_i \{Y_i\}$, $i=\overline{1,n}$,

$Y_{\max}=\max\limits_i \{Y_i\}$, $i=\overline{1,n}$,

1. Вычислим площадь прямоугольника:

S=($X_{\max}-X_{\min}$)*($Y_{\max}-Y_{\min}$).

Труды СПИИРАН. 2003. Вып. 1. Т. 3. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2003. Issue 1. V. 3. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

2. Начнем обход многоугольника, например, с точки $X_i = X_{\min}$ и будем двигаться, перебирая ребра по часовой стрелке (иначе формулы будут записываться несколько иным образом). Вычитаем из площади прямоугольника площадь очередной трапеции:

S=S - (X_{i+1} - X_i)*($Y_{\max}$ - ($Y_{i+1} + Y_i$)/2)

Условие завершения обхода имеет вид: $X_{i+1} = X_{\max}$.

3. Тогда формула уменьшения площади выглядит так:

S=S - (X_i - X_{i+1})*(($Y_{i+1} + Y_i$)/2 - $Y_{\min}$)

4. Перебрав все ребра, получим S – искомую площадь многоугольника.

Для иллюстрации работы алгоритма приведем следующий пример.

Пример

Вычислим площадь многоугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$, представленного на рисунке 1, где вершина A_i имеет координаты (x_i , y_i), $i = \overline{1,8}$

1. Очевидно, что $X_{\min} = x_1, X_{\max} = x_4, Y_{\min} = y_5, Y_{\max} = y_2$. Строим прямоугольник *KLMN*, минимальный из охватывающих многоугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$,

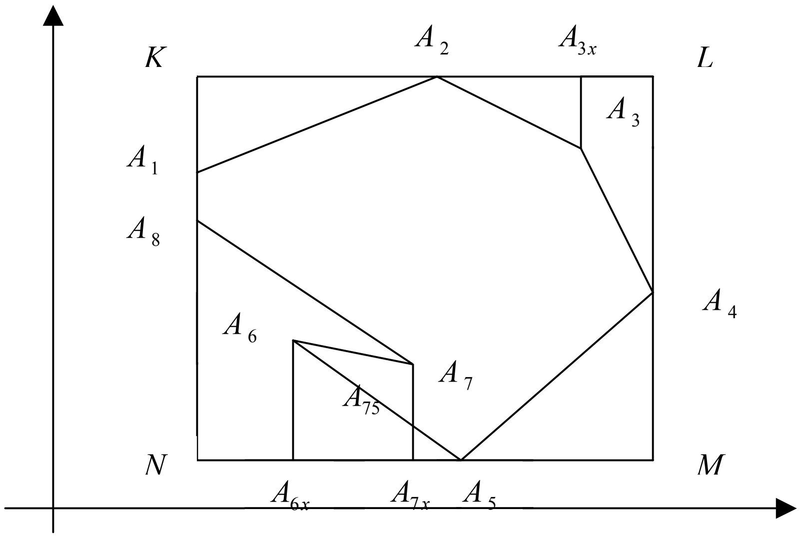

Рис. 1. Многоугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$.

со сторонами, параллельными осям координат.

Его площадь

S = (x_4 - x_1)*(y_2 - y_5)

2. Двигаемся по часовой стрелке. Первое ребро $A_1 A_2$.

S = S - (x_2 - x_1)*(y_2 -($y_2 + y_1$)/2) = S - (x_2 - x_1)*(y_2 - y_1)/2

Вычитается площадь треугольника $A_1 K A_2$. Следующее ребро $A_2 A_3$.

S = S - (x_3 - x_2)*(y_2 -($y_3 + y_2$)/2) = S - (x_3 - x_2)*(y_2 - y_3)/2

Вычитается площадь треугольника $A_2 A_{3x} A_3$. Следующее ребро $A_3 A_4$.

S = S - (x_4 - x_3)*(y_2 -($y_4 + y_3$)/2) = S - (x_4 - x_3)*((y_2 - y_3)+(y_2 - y_4))/2

Труды СПИИРАН. 2003. Вып. 1. Т. 3. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2003. Issue 1. V. 3. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Вычитается площадь трапеции $A_{3x} L A_4 A_3$. Точка A_4 – такая, что $X_{\max} = x_4$. Переходим к другой группе формул.

3. Следующее ребро $A_4 A_5$.

S = S - ($x_4 - x_5$)*(($y_4 + y_5$)/2- y_5) = S - ($x_4 - x_5$)*($y_4 - y_5$)/2

Вычитается площадь треугольника $A_4 M A_5$. Следующее ребро $A_5 A_6$.

S = S - ($x_5 - x_6$)*(($y_5 + y_6$)/2- y_5) = S - ($x_5 - x_6$)*($y_6 - y_5$)/2

Вычитается площадь треугольника $A_6 A_{6x} A_5$. Следующее ребро $A_6 A_7$.

S = S - ($x_6 - x_7$)*(($y_6 + y_7$)/2- y_5) = S - ($x_6 - x_7$)* (($y_6 - y_5$)+($y_7 - y_5$))/2

Так как $x_7 > x_6$ площадь трапеции $A_6 A_7 A_{7x} A_{6x}$ добавляется к S, к уже имеющемуся там треугольнику $A_6 A_7 A_{75}$ и удаленной трапеции $A_6 A_{75} A_{7x} A_{6x}$. Следующее ребро $A_7 A_8$.

S = S - ($x_7 - x_8$)*(($y_7 + y_8$)/2- y_5) = S - ($x_7 - x_8$)*(($y_7 - y_5$)+($y_8 - y_5$))/2

Удаляется площадь трапеции $A_8 A_7 A_{7x} N$, в том числе один из треугольников $A_6 A_7 A_{75}$ (второй – остается), добавленная площадь трапеции $A_6 A_{75} A_{7x} A_{6x}$ и остальная часть площади прямоугольника *KLMN* вне многоугольника. Последнее ребро $A_8 A_1$ представляет собой отрезок ребра прямоугольника *KLMN* и вычитает из площади 0:

S = S - ($x_8 - x_1$)*(($y_8 + y_1$)/2- y_5) = S – 0 = S

S — искомая площадь многоугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$.

Данный алгоритм легко программируется и может быть использован в программах обработки больших массивов координат.

Эффективность алгоритма превосходит эффективность метода трапеций так как не требует предварительной сортировки координат вершин многоугольника, что оценивается как O(n $\log_2$ n) в то время как нахождение максимума и минимума не портит общей оценки эффективности алгоритма как O(n), где n в обоих случаях – число вершин многоугольника.

Литература

[1] *Корн Г., Корн* Т. Справочник по математике — М.: Наука, 1970. — 720 с.